



Die Unendliche Gurke

Rätsel für Kinder, Pädagogen, Eltern und Rätsel-Fans



Dieses Buch ist zum Teilen gedacht!

Du kannst es kostenlos auf MathPickle.com herunterladen.

Besuche www.Patreon.com/MathPickle, um mich bei der Erstellung des nächsten Buches zu unterstützen.

Die **Unendliche Gurke**
ISBN: 978-0-9879515-7-1

Illustrationen von **Okan Bulbul**
Unterstützt von **Jens Greiner**
Buchgestaltung von **Camila Macca**



Die Unendliche Gurke

Die meisten Rätsel enthalten allgemeine Regeln und eindeutige Hinweise.

Beispiele für allgemeine Regeln:

- Bei Sudoku passt nur eine Zahl in jedes Quadrat.
- Bei Kreuzworträtseln sind die Wörter horizontal oder vertikal, nicht diagonal.

Beispiele für eindeutige Hinweise:

- Das heutige Sudoku-Rätsel hat die Zahl "6" im oberen linken Feld.
- Das heutige Kreuzworträtsel hat den Hinweis "26 quer: Griechischer Gott der Jagd".

Unendliche Gurken sind anders. Bei ihnen sind nur allgemeine Regeln notwendig. Diese Regeln reichen aus, um eine unendliche Anzahl von Rätseln zu erstellen, von einfach bis komplex.

Da die Schwierigkeit nach hoch oder niedrig gewählt werden kann, können **Unendliche Gurken** sowohl für Schüler mit Schwierigkeiten als auch für begabte Schüler geeignet sein. Der Lehrer muss nicht mehrere Aktivitäten für verschiedene Schüler vorbereiten. Diese Aktivitäten sind für alle geeignet. 😊

Auch Erwachsene werden sich an den immer schwieriger werdenden Herausforderungen er-freuen, die **Unendliche Gurken** bieten. Nimm die Herausforderung an, trete gegen mich an oder treffe dich mit deinen Freunden und Feinden und spiele mit ihnen.

Zu jeder **Unendlichen Gurke** habe ich einige meiner besten Antworten beigefügt. Ich nehme mir oft nicht die Zeit, um zu beweisen, dass dies die besten Antworten sind - und benutze auch keine Computer, um mir zu helfen. Das bedeutet, dass du mich schlagen kannst. Das macht Spaß! Das ist schon einmal zwischen dem englischen und dem deutschen Buchdruck passiert. Amelie Cao, ein Mädchen der Klasse 6 aus New York, hat meinen Highscore bei einem Rätsel mit 2133 Punkten geschlagen. Ich überlasse es dir, das Rätsel zu finden!

Immer, wenn einige meiner besten Antworten erscheinen, rufe ich **"SPOILERALARM!"**

Tabelle mit Rätseln

13	Ungeschnittene Spaghetti
69	SPRINGENDE FRÖSCHE
138	UKRAINE ZUM AUSMALEN
206	ERKLIMME EINEN BERG!
241	Das gierige Gurkenmonster
282	QUADRAT-CLIQUE

339	KLEBER
390	ERD-ATTACKE
412	LANGWEILIGE GESPRÄCHE
441	GRAPHEN-TRAMPOLIN
522	WILLIE WIGGEL WIGGEL WURM
585	PINOCCHIOS SPIELKAMERADEN
685	Blubbernde Kessel
720	BANYAN BAUM



Ich mag jedes einzelne Kapitel, das ich gelesen habe (und ich habe ALLE gelesen). Ich LIEBE das Rätsel zum Ausmalen der Ukraine (die Karte der Ukraine könnte sich leider ändern...) und auch das Rätsel über die bösen Herrscher [aus der Fortsetzung: *Die Unendliche +1 Gurke*]. Wow, das ist Kombinatorik, die schon Grundschulkindern verständlich ist.

Nitsa Movshovitz-Hadar
Haifa, Israel

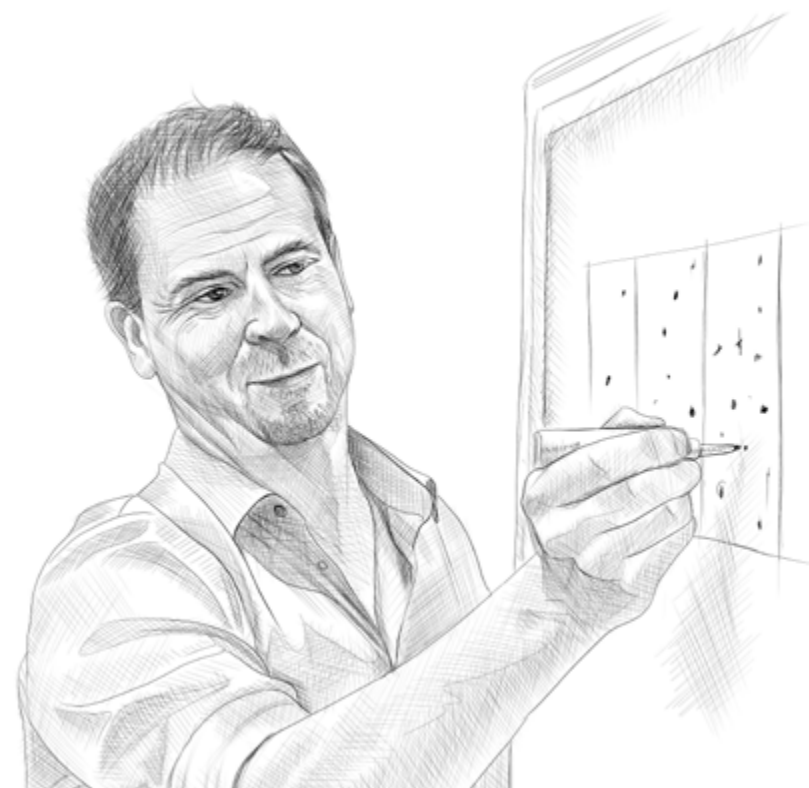
Nitsa Movshovitz-Hadar ist eine emeritierte Professorin für Mathematikunterricht am Technion in Haifa.

Die Unendliche Gurke... Genial!!! Ich bin überwältigt, wie kreativ und innovativ diese Rätsel sind. Wowza!

James Tanton
Arizona, USA

James ist der "Mathematician-at-Large" für die Mathematical Association of America. Er ist der Erfinder der explodierenden Punkte.

Google
"Explodierende
Punkte"



Vielen Dank für diese fantastischen Rätsel und Spiele! Sie machen so viel Spaß!

Gabriella Pinter
Milwaukee, USA

Gabriella ist Professorin am Fachbereich für mathematische Wissenschaften an der Universität von Wisconsin-Milwaukee.

JSowas wie eine indische Mahlzeit nie ohne Gurken vollständig ist, ist auch eine mathematische Grundlage nie vollständig ohne die Verspieltheit, die in *Die Unendliche Gurke* vorgestellt wird. Jedes Kapitel enthält lustige, einfache, bunte und interessante Spiele und Aktivitäten, die die grauen Zellen stimulieren. Das ist die beste Art, Mathematik zu lernen - durch Spaß und Spiel.

Kiran Bacche
Bangalore, Indien

Kiran leitet den Bangalore Math Circle. Er ist Mitbegründer von dhimath.org.



WO IST SEITE 5 GEBLIEBEN?

Die meisten Bücher nummerieren die Seiten in einer vorhersehbar langweiligen Reihenfolge. **Was für eine Zeitverschwendung!**

Bevor du jede Seite umblätterst, versuche herauszufinden, welche Zahl auf der nächsten Seite steht. Es ist die nächste ganze Zahl, die auf genau eine Weise die Summe der beiden vorherigen Seitenzahlen ist.

Eine Liste mit allen Ulam-Zahlen unter 1000 findest du auf Seite 847.

Vielen Dank an Stanisław Ulam aus Lviv, Ukraine, für diese Zahlenfolge!



Äpfel für die Arbeit mit Kindern!

Wenn du mit Kindern arbeitest, unterrichtest du allzu oft nur mit Algorithmen, die du beherrschen musst, und pädagogischen Techniken, die dich zur Einhaltung zwingen. Lass uns neu beginnen. Wenn du ein paar tolle Rätsel kennst, kann die Zeit, die du mit kleinen Menschen in der Mathematik verbringst, fröhlich und produktiv sein.

So wie du kein großartiger Englischlehrer sein kannst, wenn du Harlequin Romances liest, kannst du auch kein großartiger Mathelehrer sein, wenn du mittelmäßige Rätsel benutzt. Die besten Aufgaben helfen bei den wichtigsten Dingen, die wir uns für unsere Kinder wünschen. In der Reihenfolge ihrer Wichtigkeit möchten wir, dass sie:

- #1 Probleme zu lösen,
- #2 nach einem Misserfolg weitermachen,
- #3 mathematische Fähigkeiten erwerben.

Diese Liste ist für Eltern und Lehrkräfte ausreichend, aber auch Lehrkräfte müssen:

#4 schwache und begabte Schüler gleichzeitig fördern.

Die **Unendlichen Gurken** in diesem Buch erfüllen all diese Aufgaben.

Bei der **Unendlichen Gurke** geht es nicht darum, Dinge so EINFACH wie möglich zu vermitteln, sondern darum, sie so FÖRDERND wie möglich zu vermitteln. Den Algorithmus der Addition zu vermitteln, ist EINFACH. Das Problem ist nur, dass, bevor du den Mund aufmachst, die besten 20% deiner Klasse bereits wissen, wie man addiert; die restlichen 20% deiner Klasse haben Mühe, sich an den Lehrplan des letzten Jahres zu erinnern.

Mit der **Unendlichen Gurke** kannst du die ganze Klasse so lange beschäftigen, bis 90% verstehen, wie es funktioniert. Wenn sich die Klasse dann in Paare aufteilt, kannst du dich beliebig bewegen und einer Gruppe dort helfen, wo sie es am meisten braucht. Leistungsstarke Kinder werden zum Problemlösen abgelenkt (keine Zeitverschwendung) und schwächere Kinder arbeiten am Erwerb von Fähigkeiten.

Die Arbeit mit Kindern ist eine experimentelle Wissenschaft. Manche meiner Ideen werden für dich funktionieren, manche nicht. Du kannst Ideen ablehnen und übernehmen, wie du es für richtig hältst. Ich wünsche dir viel Erfolg.

Gord!

PS. Im ganzen Buch werde ich den Apfel immer dann verwenden, wenn ich denjenigen von euch, die mit Kindern arbeiten, etwas sagen möchte. 😊



Gurken für die Genies unter euch!

Du fühlst dich heute wie ein Genie. Es wird Zeit, sich in ein tolles Rätsel zu vertiefen. In diesem Buch hast du die Qual der Wahl. Wenn du bereit bist, deine Antworten zu überprüfen, kannst du sie mit meinen besten Versuchen vergleichen.

Und wenn du damit fertig bist, dein Rätselhirn zu beschäftigen, ist es vielleicht an der Zeit, an deren zu helfen. Viele dieser Rätsel würden traditionell als Hobby-Mathematik eingestuft werden. Das verharmlost sie. Sie sind vielmehr als pädagogische Juwelen zu bezeichnen. Sie sprechen das gesamte Spektrum der Fähigkeiten der Schüler an.

Manche von euch waren begabte Kinder. Eure Lehrerin oder euer Lehrer musste einen Weg finden, euch zu inspirieren, ohne das Kind neben euch zu vernachlässigen, das sich abmüht. Mit mittelmäßigen Aufgaben ist das unmöglich. Der wahre Beweis für diese Rätsel ist nicht, dass du sie interessant fandest, sondern dass alle deine Mitschüler sie auch interessant fanden.

Wenn du erklären willst, dass 29 weniger als 30 ist, ersetze eine normale Unterrichtsstunde durch Ungeschnittene Spaghetti. Wenn du das Zählen unterrichtest, ersetze eine normale Unterrichtsstunde durch Springende Frösche. Wenn du den Stellenwert von Zahlen unterrichtest, benutze die Ukraine zum Ausmalen.
All diese Unendlichen Gurken können anstelle der normalen Unterrichtsstunden eingesetzt werden. Sie passen in jeden Lehrplan. Sie können auch für ältere Kinder geeignet sein, weil sie alle das Problemlösen fördern, das den Kern eines guten Mathematikunterrichts ausmacht.

Wer sich mit Grundschulklassen auseinandersetzt, wird genauso viel lernen, wie er geben wird. Vielleicht ist es nicht deine Stärke, junge Menschen zu inspirieren, aber diese Zusammenarbeit ist sehr wertvoll.

Du denkst vielleicht, dass du in der Oberstufe die besten Chancen hast, mit jungen Menschen in Kontakt zu kommen, aber meiner Meinung nach kannst du deine Zeit am effektivsten nutzen, wenn du Seite an Seite mit Grundschullehrern arbeitest. Hier findest du wissensdurstige Schülerinnen und Schüler, Lehrerinnen und Lehrer, die offen für eine Zusammenarbeit sind, und einen Lehrplan, der flexibler ist als in der Oberschule.

Gord!

PS. Im ganzen Buch werde ich die Gurke benutzen, wenn ich etwas zu den Genies sagen will. 😊

Ungeschnittene Spaghetti

Ich habe einmal einen geizigen Rätsler besucht, der nummerierte Essteller hatte. Als ich hungrig wurde, wurde eine einzelne Spaghetti gekocht.

Der Rätsler forderte mich auf, eine Zahl zu wählen. **Ich wählte 14.** Dann wurde mein Spaghettrum auf meinem Teller ausgelegt - beginnend bei 14 und immer bis zur kleinsten benachbarten Zahl, die noch nicht erreicht worden war.

x Diagonale Züge sind nicht erlaubt.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

Der geizige Rätsler hat gesagt, dass ich mein Spaghettrum essen kann, wenn ich den Teller gefüllt habe - sonst müsste das Spaghettrum geschnitten werden und das wäre nicht gut. Ich würde also kein Abendessen bekommen.

- War 14 eine gute Wahl?
- Welche Zahlen funktionieren?
- Welche Zahlen funktionieren nicht?
- Gibt es Muster, die für unterschiedlich große Teller gelten?

SPOILERALARM!

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

Ja-14 war eine gute Wahl. Die ganze Spaghetti kamen auf den Teller, ohne dass sie geschnitten werden mussten. Wir werden 14 zur Feier des Tages grün anmalen.

Nicht alle Zahlen funktionieren. Hätte ich die 31 gewählt, würde das Spaghettrum den Teller nicht ausfüllen. Es müsste geschnitten werden. Wie alle Italiener wissen, schmeckt ein geschnittenes Spaghettrum nicht so gut wie ein ungeschnittenes Spaghettrum.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

Ich male 31 rot an, als Warnung!

Auf der folgenden Seite zeigen wir die rot-grüne Färbung dieses 6x6 Tellers und anderer Teller von 1x1 bis 8x8.

SPOILERALARM!

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

In jeder Klasse gibt es Kinder, die Probleme mit ihrem Selbstwertgefühl haben. Mit welcher Frage kannst du einem Kind mit geringem Selbstwertgefühl eine positive Erfahrung garantieren, wenn du es vor der ganzen Klasse aufforderst?

"Connor - wähle ein Quadrat, von dem du glaubst, dass es scheitern wird."

Das ist ein gutes pädagogisches Mittel für kleine Kinder, denn wenn Connor ein Quadrat findet, das misslingt, könnt ihr das feiern. Findet Connor ein Quadrat, das erfolgreich ist, könnt ihr auf eine andere Weise feiern. In beiden Fällen geht es darum, die Probleme mit dem Selbstwertgefühl zu umgehen, damit das Kind sich entspannen und Spaß am Rätsel haben kann.



0	1
2	3

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

Mein 6x6 Teller ist farbig.

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

0

0	1	2
3	4	5
6	7	8

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48

Ich habe dieses Rätsel ausgewählt, weil ich gerne Spaghetti esse :) Ich mag es, die langen Spaghetti zu zeichnen und dann mit Grün auszumalen. Ich mag es nicht, wenn die Spaghetti kurz geschnitten sind und ich mit Rot malen muss.

Arven hat gerade die 1. Klasse absolviert. Sie liebt Mathe, aber noch mehr liebt sie Kunst. Sie lebt in Ankara, Türkei. Ihre Mutter, Özgül, hat einen Dokortitel in Sonderpädagogik.



Stelle anhand der Muster der Tafel 1-8 Vermutungen über die Farbe dieser 10x10 Tafel an, bevor du die Lösung auf der nächsten Seite siehst.

Ich benutze eine 0-99 Wandtafel. Sie sind schwer zu finden, aber besser als die üblichen 1-100 Wandtafeln. Warum?

- Weil wir einfache Muster erkennen sollten und eines der wichtigsten für Schüler ist die Zahl zehn.
- Die Zahlen in jeder Reihe haben die gleiche Anzahl von "Zehnern".
- Von links nach rechts steigen die "Einheiten" von 0-9.

Manchmal benutze ich ein Flipchart mit den Zahlen 100-199 auf der zweiten Seite und 200-299 auf der dritten Seite, usw. Jede Seite besteht aus den Zahlen, die die gleiche Anzahl von "Hundertern" haben. Wenn ich bei "72" anfangе, weiß ich, dass "172" direkt darunter steht.



Benutze eine 1-100 Wandtafel, wenn du keine 0-99 Wandtafel finden kannst.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Es gibt viele Muster, die du vielleicht schon auf den kleineren Tafeln beobachtet hast:

- Die Spalte auf der rechten Seite scheint abwechselnd grün und rot zu sein.
- Die zweite Spalte auf der rechten Seite scheint überwiegend rot zu sein.
- Ein Teil der Tafel ist mit einem Schachbrettmuster bedeckt.
- Die untere Reihe scheint hauptsächlich rot zu sein.

Es gibt einen Unterschied zwischen Tafeln, die eine ungerade und eine gerade Kantenlänge haben. Diese 10x10-Tafel hat mehr mit 6x6- und 8x8-Tafeln gemeinsam als mit 5x5- und 7x7-Tafeln.

Man sollte von keiner Klasse erwarten, dass sie alle oben genannten Punkte versteht. Lass die Schüler/innen Vermutungen anstellen und überprüfe dann, ob sie richtig liegen. Belohne falsche Vermutungen noch mehr als richtige. So weckst du offene Neugier und nimmst ihnen das Stigma des Scheiterns.



↓ ↓ ↓

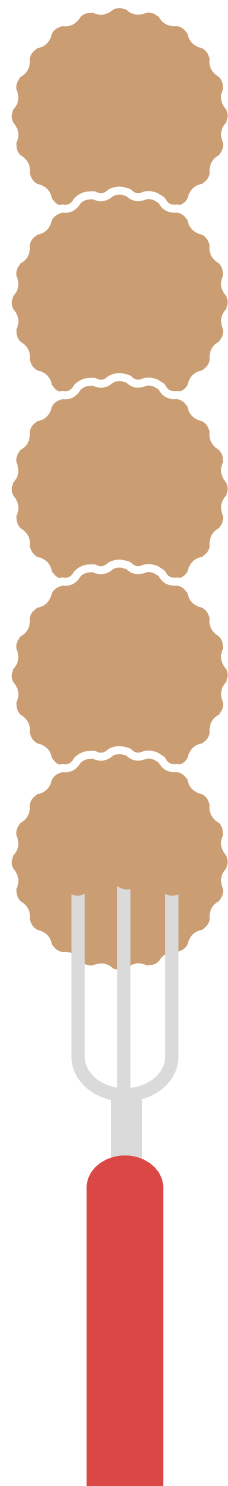
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Lege auf eine 5x5-Tafel fünf Fleischbällchen, damit alle anderen Zahlen grün gefärbt werden können. (Das Spaghettum ignoriert alle Zahlen, die mit einem Fleischbällchen abgedeckt sind.)

SPOILERALARM!

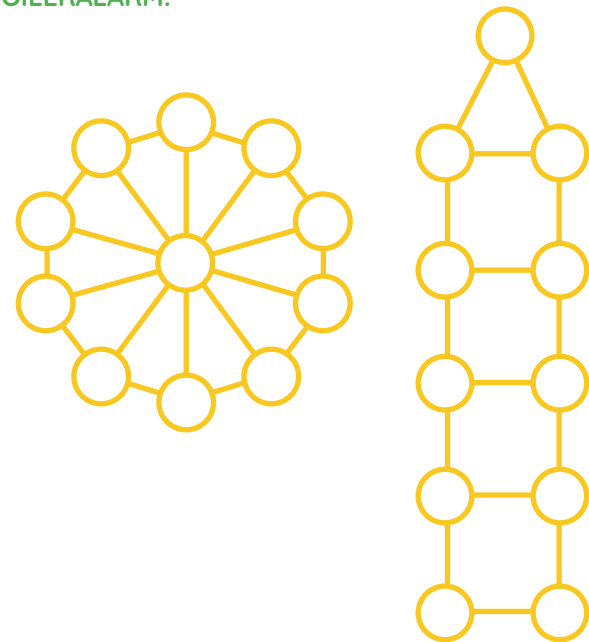
Ordne die Zahlen 0-15 auf einer 4x4 Tafel so an, dass du alle Zahlen grün färben kannst.

SPOILERALARM!



Wenn ein nasses Spaghetti aushärtet, kann es stark genug sein, um Dinge zu bauen. Ergänze die Kreise auf dem Turm und dem Rad mit den Zahlen 1-11. Achte darauf, dass du, egal bei welchem Kreis du anfängst, immer wieder zur kleinsten zusammenhängenden Zahl gehst, damit du alle Kreise besuchen kannst.

SPOILERALARM!



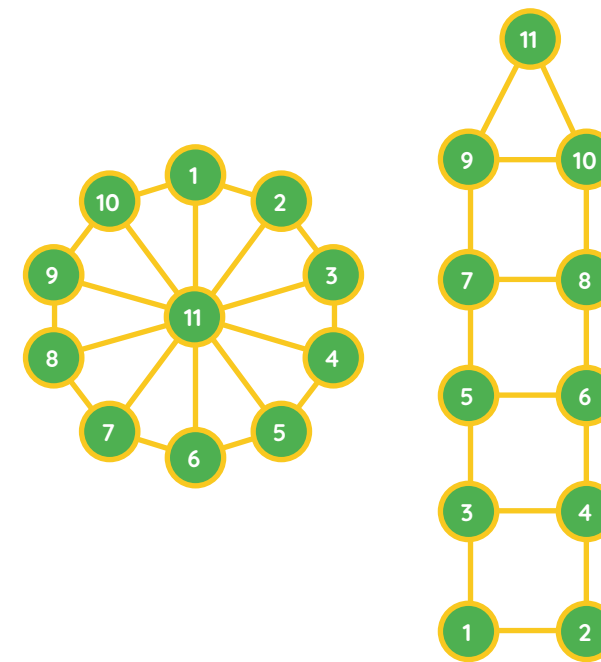
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Fünf Fleischbällchen können auf eine 5x5-Tafel gelegt werden, so dass alle anderen Zahlen grün sind.

0	6	7	1
5	13	14	8
4	12	15	9
3	11	10	2

Es gibt viele Möglichkeiten, die 0-15 Tafeln zu nutzen. Lege die Zahlen 0-3 in die Eckquadrate und die Zahlen 12-15 in die mittleren Quadrate. Fülle den Rest der Tafel nach Belieben aus.

Falls du ein schönes Online-Erlebnis von Tafeln bis zur Größe 20x20 haben möchtest, google "data genetics Ungeschnittene"

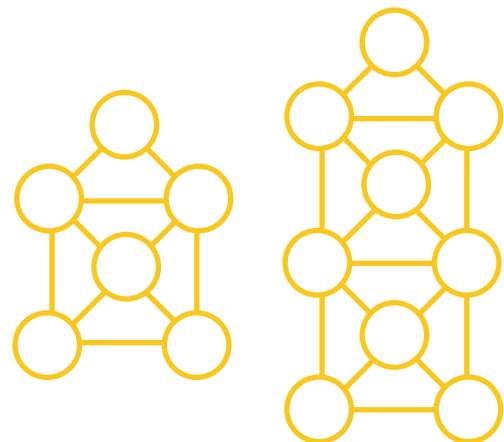


Bei allen Schritten zum Lösen von symmetrischen Rätseln sollten die Schüler ermutigt werden, über die Symmetrie nachzudenken.



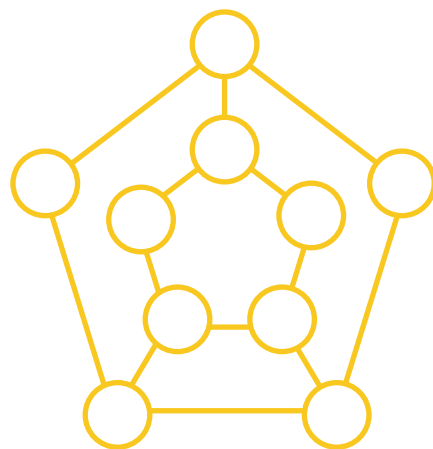
- Wenn die obigen Rätsel zu unheimlich aussehen, sollte ein Schüler zuerst versuchen, einen kürzeren Turm oder ein Rad mit weniger Speichen zu lösen.
- Nachdem eine Lösung gefunden wurde, sollten sich die Schüler fragen, ob sie eine allgemeine Lösung gefunden haben, die unendlich viele Rätsel löst - Türme in beliebiger Höhe und Räder mit beliebig vielen Speichen.

Vervollständige die Nummerierung des Hauses und der Villa, damit sie ganz grün bleiben können.



Schwieriger: Füge die Zahlen 1-10 zu den Kreisen unten hinzu. Achte darauf, dass du, egal bei welchem Kreis du beginnst, durch wiederholtes Bewegen zur kleinsten zusammenhängenden Zahl alle Kreise besuchen kannst.

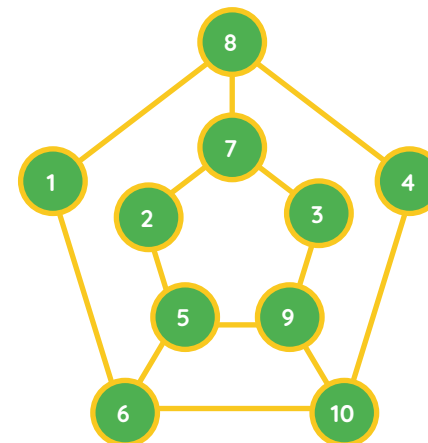
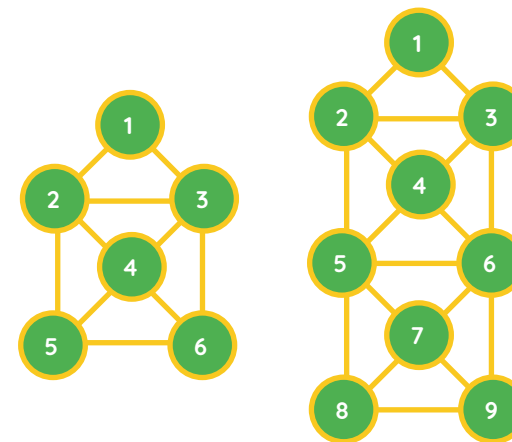
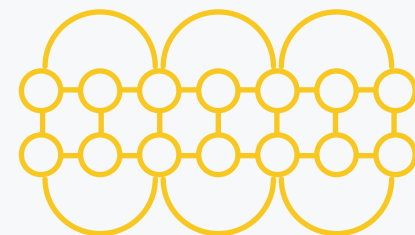
SPOILERALARM!



Setze die positiven ganzen Zahlen 1-n auf die n Eckpunkte eines Diagramms. Male einen Scheitelpunkt grün an, wenn ein Weg, der dem ungeschnittenen Spaghetti-Algorithmus folgt, alle Punkte berührt. Ansonsten male den Punkt rot an.

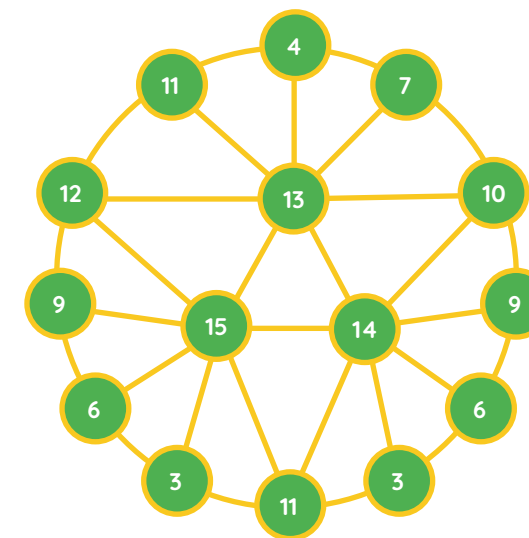
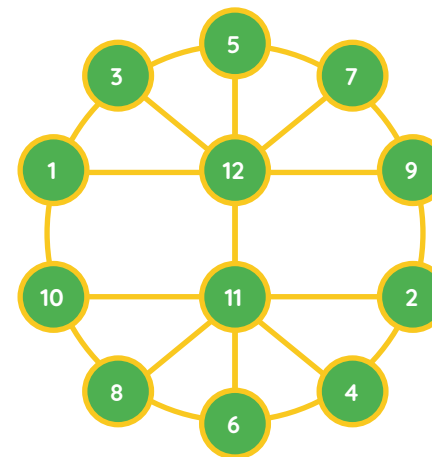
Welche Diagramme können durch sorgfältige Platzierung der Zahlen alle grün gefärbt werden?

Können Diagramme mit einer Schleife durch alle Punkte immer grün gefärbt werden? Wenn nicht, finde ein solches Diagramm mit den wenigsten Punkten oder den wenigsten Kanten, für die es keine vollständig grüne Färbung gibt. Dieses Diagramm mit 14 Punkten sieht wie ein guter Kandidat aus, aber ich bin mir nicht sicher:

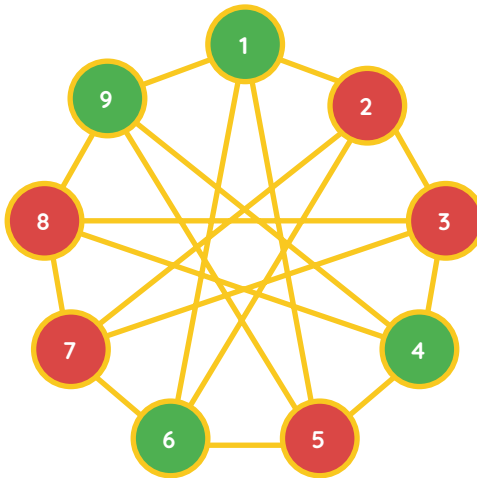
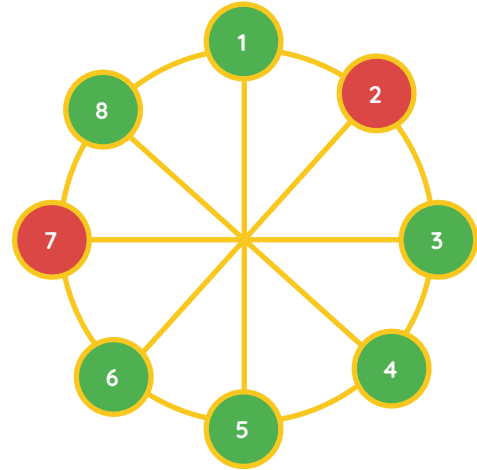


Deine Schüler können ihre eigenen Rätsel erstellen. Zu Beginn solltest du die Anzahl der Kreise auf maximal 8 begrenzen. Wenn du keine Begrenzung festlegst, könnten die Rätsel zu schwierig sein, um herauszufinden, ob sie möglich oder unmöglich sind.

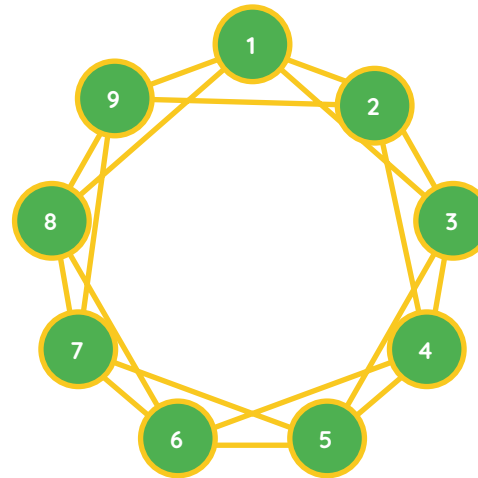
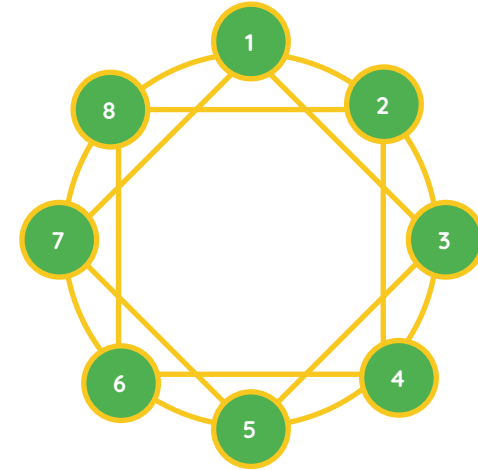
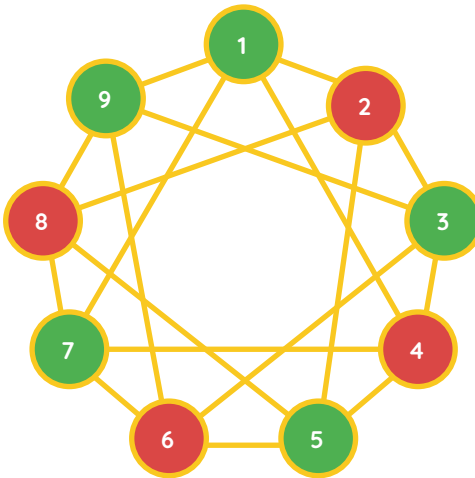
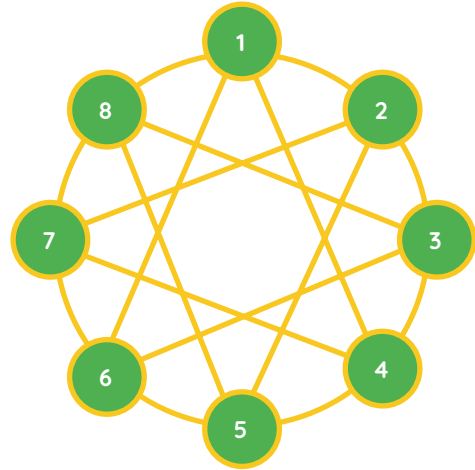
Ermutige die Schüler, die Klassen der symmetrischen Puzzles zu erkunden. Die großen Rätsel auf der rechten Seite sehen schön aus und haben Lösungen, die verallgemeinert werden können.



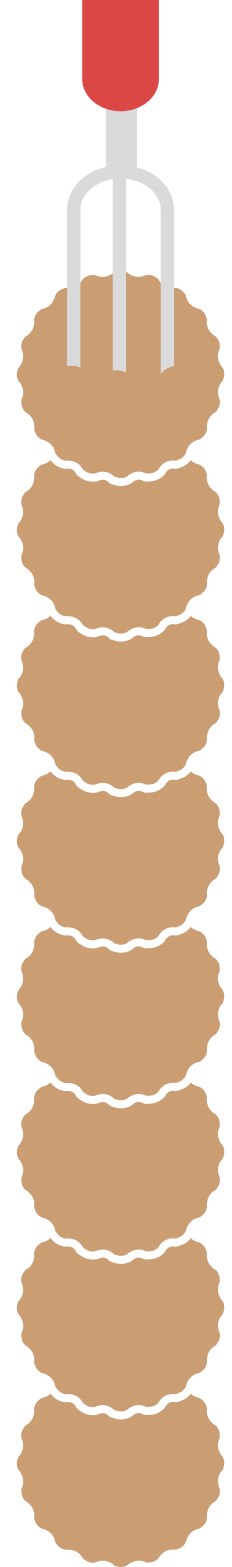
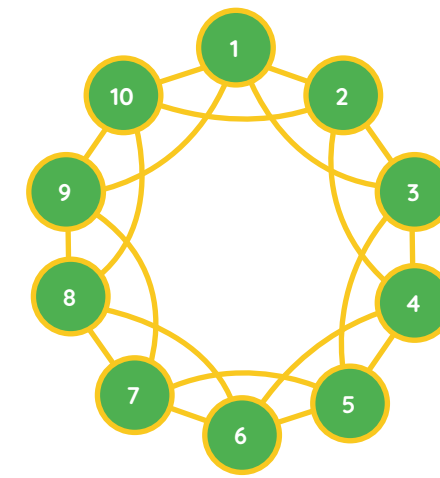
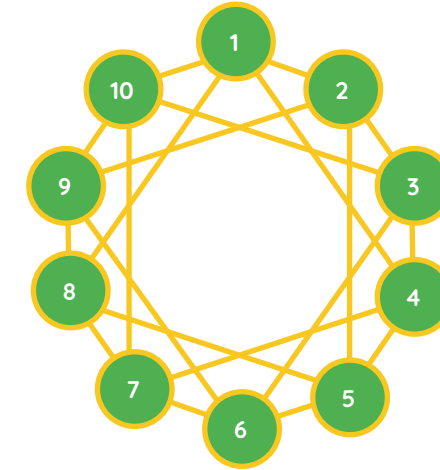
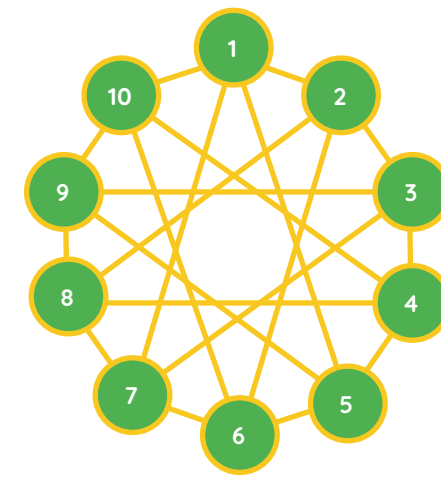
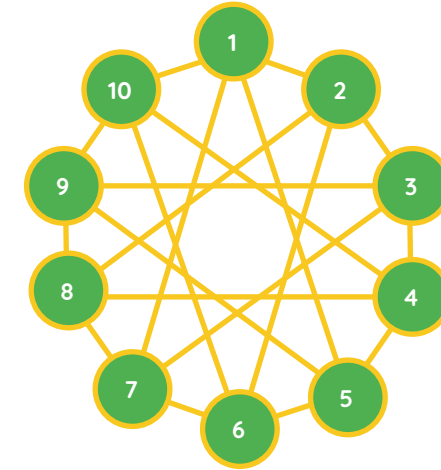
Diese Zeichenketten-Diagramme können im Uhrzeigersinn durchnummeriert werden. Einige von ihnen sind alle grün. Experimentiere mit anderen Stringart Diagrammen, um zu sehen, wann sie alle grün sind.



Ist dir aufgefallen, dass alle diese Diagramme spiegelsymmetrische Färbungen haben? Gilt das auch für größere Kreisläufe?



Das hat mich verwirrt, als ich es das erste Mal ausprobiert habe. Die Symmetrie schien zu stimmen, aber ich konnte mir nicht vorstellen, warum. Aber natürlich funktioniert sie nicht. Experimentiere mit größeren Kreisläufen.



SPRINGENDE FRÖSCHE

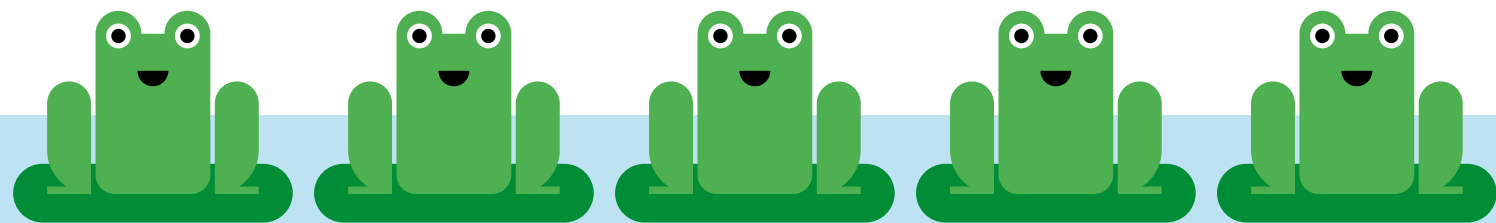
Immer wenn Frösche alleine sind, **spielen sie ein Spiel**.

Die Frösche stellen ihre Seerosenblätter in einer Reihe auf. In jeder Runde springen alle Frösche auf einem Seerosenblatt nach links oder rechts. Wie weit sie springen, hängt davon ab, wie viele Frösche sich auf dem Seerosenblatt befinden.

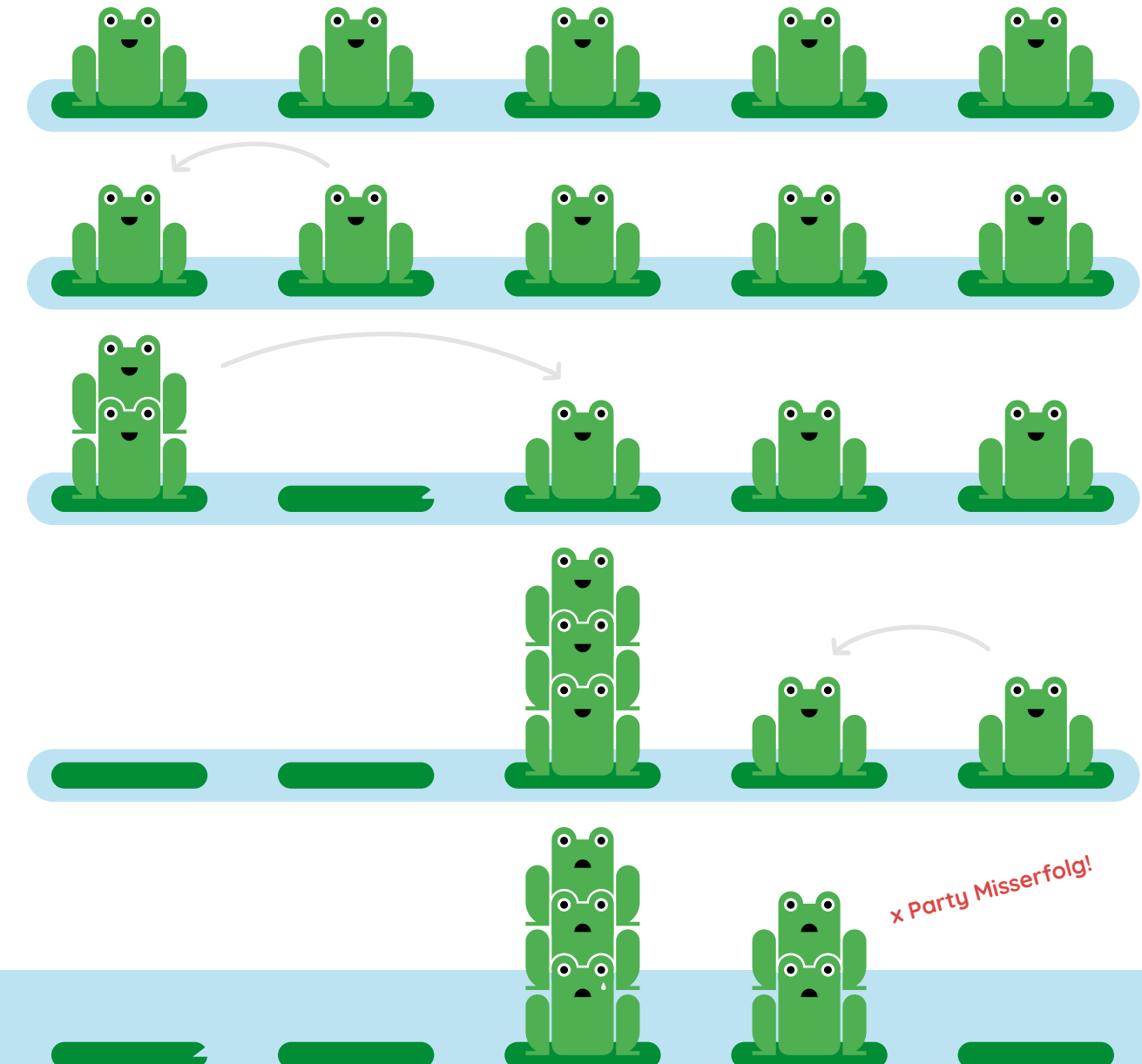
- ein Frosch springt einmal.
- zwei Frösche springen zweimal.
- drei Frösche springen dreimal.
- usw.

Die hüpfenden Frösche können nie auf einem leeren Seerosenblatt landen. Können alle Frösche am Ende auf demselben Seerosenblatt feiern?

Das ist für fünf Frösche möglich.
Probiere es aus!



Folge nicht dem Beispiel dieser 5 kriminellen Frösche. Alle ihre Sprünge sind richtig, aber die Ergebnisse sind traurig.



Nachdem du es für fünf Frösche gelöst hast, versuche es mit 6, 7, 8 oder 9 Fröschen in einer Reihe?
SPOILERALARM!

7 und 9 Frösche können zusammen feiern. Eigentlich können alle ungeraden Zahlen von Fröschen zusammen feiern. Und so geht's:

- Beginne in der Mitte.
- Springe abwechselnd nach links und rechts.

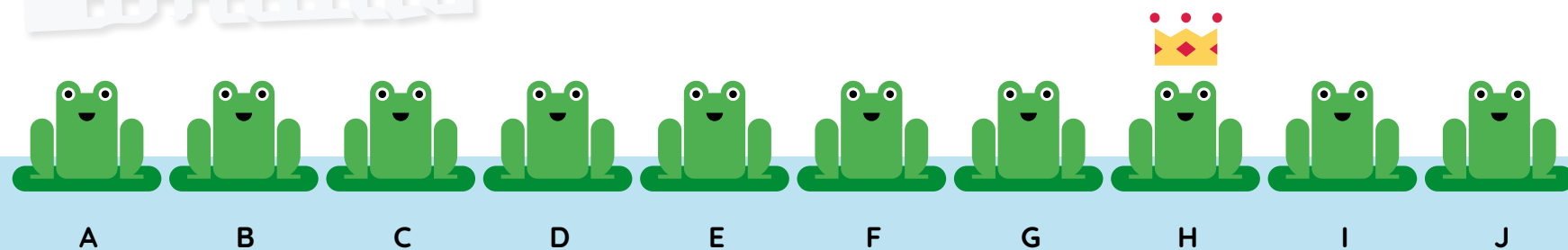
Melissa Raskauskas markiert die Seerosenblätter mit Buchstaben, damit ihre Schüler Dinge sagen können wie: "Spring Frosch C nach links." Die Markierung mit den Zahlen 1-10 kann verwirrend sein. Melissas Buchstaben sind besser.

Ein ähnliches Hin- und Herspringen ermöglicht es dir, auch alle geraden Zahlen zu lösen.

Die Froschkönigin taucht eines Nachts auf. Sie muss auf jedem Haufen, auf dem sie ist, ganz oben sein. **Kann sie mit all den Fröschen feiern, wenn sie auf Seerosenblatt 8 beginnt?**

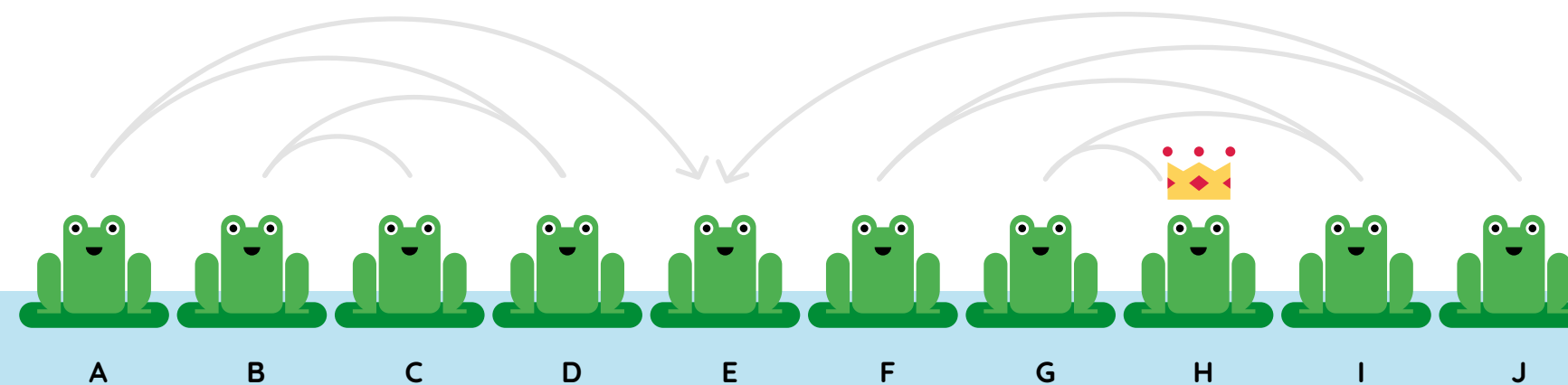
SPOILERALARM!

Schüler lieben es, ihre eigenen Regeln für Rätsel vorzuschlagen. Hast du einige mit der ganzen Klasse ausprobiert? Sind sie gut? Sind sie schrecklich, weil sie das Rätsel zu einfach oder zu schwer machen? Auch wenn die unmittelbaren Ergebnisse im Unterricht nur mittelmäßig sind - wenn die Schüler erkennen, dass Regeln von Menschen wie ihnen aufgestellt werden, ist das gute Pädagogik.



Hier ist eine Möglichkeit, der Königin zu helfen. Der Frosch auf Seerosenblatt 3 fängt an, hin und her zu springen, und dann fängt unsere Königin auf Seerosenblatt 8 an, hin und her zu springen. Die große Party findet auf Seerosenblatt 5 statt.

Egal, wo die Königin beginnt, ein ähnliches Sprungmuster sorgt dafür, dass die Frösche immer ihre Party feiern können!



Die französischen Frösche haben die Monarchie abgeschafft, um dann mit neuen populistischen Regeln in eine genauso unangenehme Lage zu geraten. Hier ist eine davon: **"Hiermit wird erklärt, dass kein Froschhaufen auf einen kleineren Froschhaufen springen darf."**

Zeig, dass es für 13 französische Frösche immer noch möglich ist, zu feiern.

SPOILERALARM!



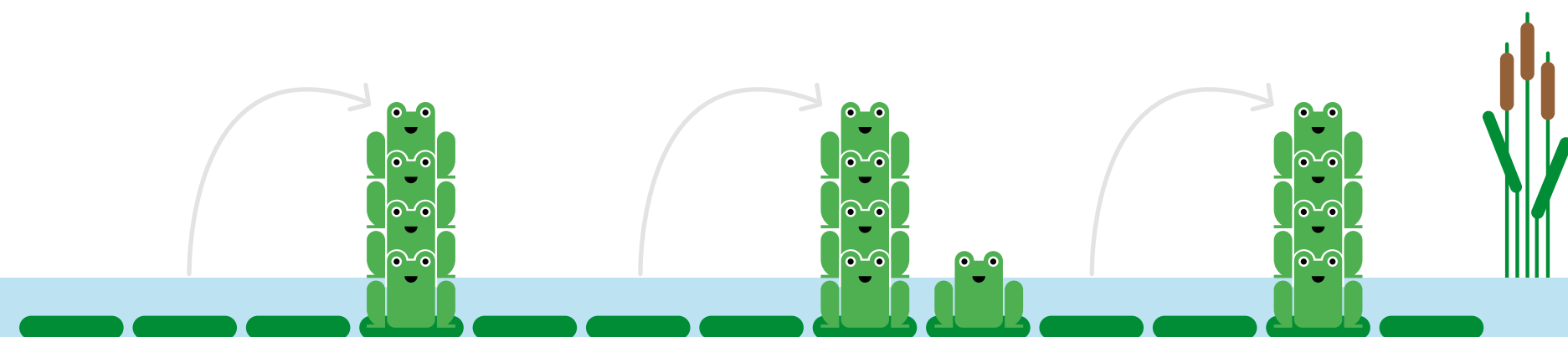
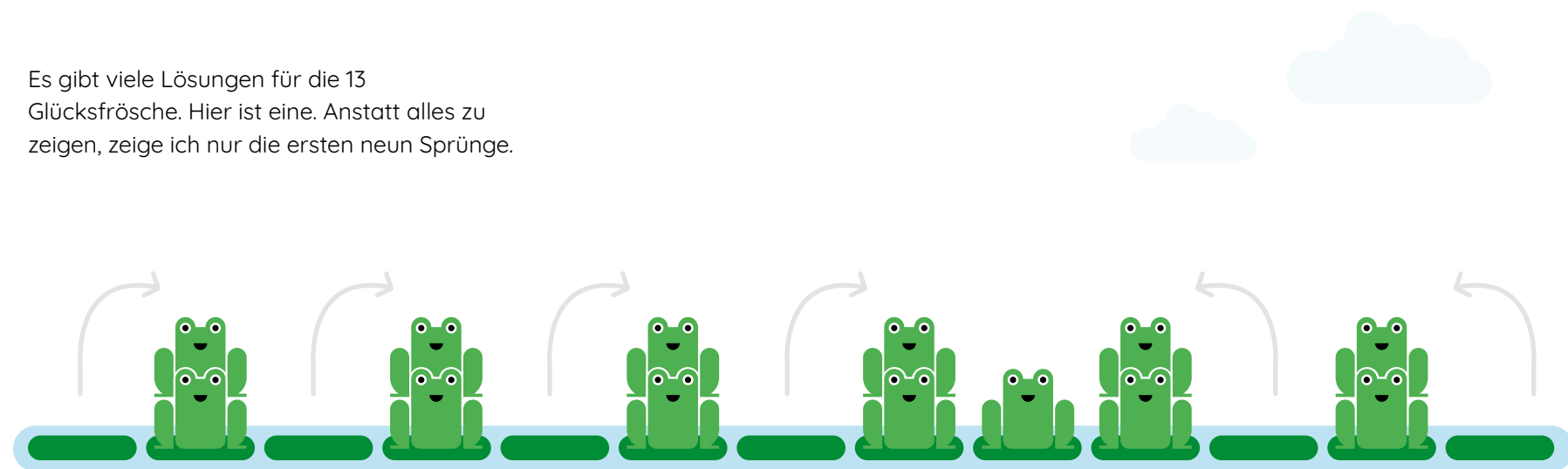
Obwohl diese neue populistische Regel das Feiern erschwert, ist es trotzdem noch möglich, eine beliebige Anzahl von Fröschen zu treffen. Das können auch Schüler der Mittelstufe beweisen.

SPOILERALARM!

Zwei Erkenntnisse, die mir geholfen haben:

1. Jede 2te Reihe von Fröschen kann an jedem beliebigen Ort eine Party feiern.
2. Jede Reihe von Fröschen kann in Zweiergruppen aufgeteilt werden.

Es gibt viele Lösungen für die 13 Glücksfrösche. Hier ist eine. Anstatt alles zu zeigen, zeige ich nur die ersten neun Sprünge.



Kehren wir zu den ursprünglichen einfachen Regeln zurück, bei denen es in Ordnung ist, wenn ein großer Haufen auf einen kleinen Haufen springt.

Wenn sich die Frösche bei ihren ersten Sprüngen schlecht entscheiden - vielleicht weil sie zu viel Sumpfwasser getrunken haben - kann das bedeuten, dass sie garantiert scheitern.

Wie viele falsche Sprünge sind bei 3-12 Fröschen am wenigsten nötig, um garantiert zu scheitern?

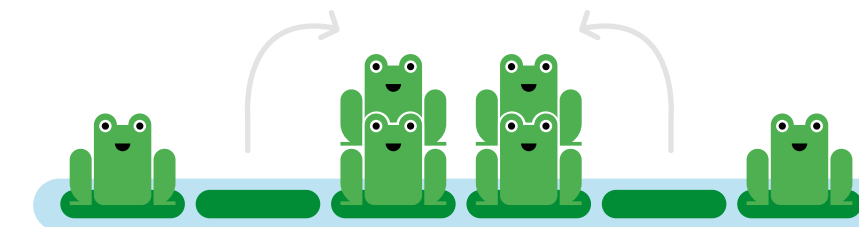
SPOILERALARM!

Bei drei Fröschen gibt es keine Möglichkeit, einen Fehler zu machen. Das war eine Fangfrage. 😊

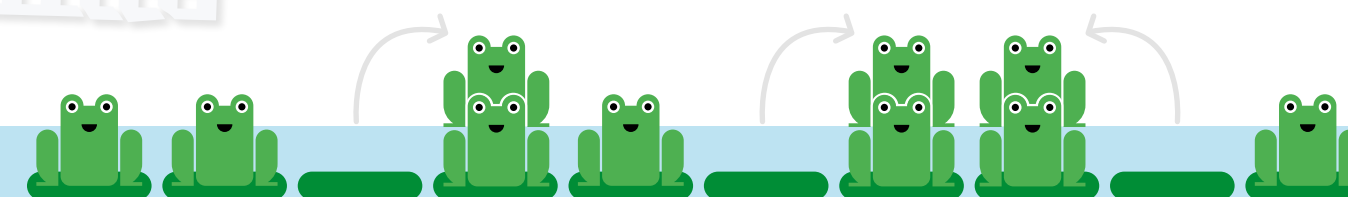
Stelle den Schülern so oft wie möglich Fangfragen. Versuche, ein ernstes Gesicht zu machen. So bleibt das Klassenzimmer lustig und frisch.



Bei 4-6 Fröschen können schon zwei falsche Sprünge die Chance auf eine Party auf einem Seerosenblatt verderben. Hier ist ein Beispiel mit sechs Fröschen:



7-10 Frösche können mit drei schlechten Sprüngen sabotiert werden. Hier ist ein Beispiel für 10:



Ich glaube nicht, dass es einen 3-Zug gibt, der elf oder mehr Frösche sabotiert. Eine Sabotage mit 4 Zügen scheint bis zu etwa 25 Fröschen möglich zu sein.

Ein kleines Balzspiel: Vor ihrem lebensverändernden Kuss spielen die Menschenprinzessin und ihr Froschprinz ein Spiel.

- Die Prinzessin möchte so wenig Partys wie möglich feiern.
- Der Froschprinz will die meisten feiern.

Beginnend mit der Prinzessin, wechseln sie sich ab. Wenn sie an der Reihe sind, befahlen sie den Fröschen auf einem Seerosenblatt zu springen. Mach so lange weiter, bis keine Sprünge mehr möglich sind. Beginne mit fünf oder sechs Fröschen.

Wenn sowohl die Prinzessin als auch der Froschprinz gut spielen, wie viele Partys (besetzte Seerosenblätter) können wir erwarten?

SPOILERALARM!

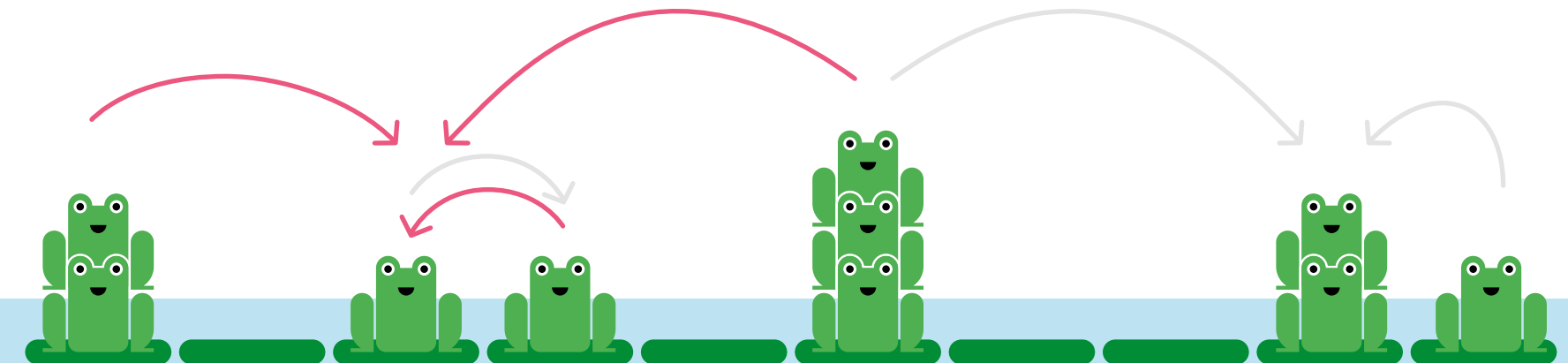
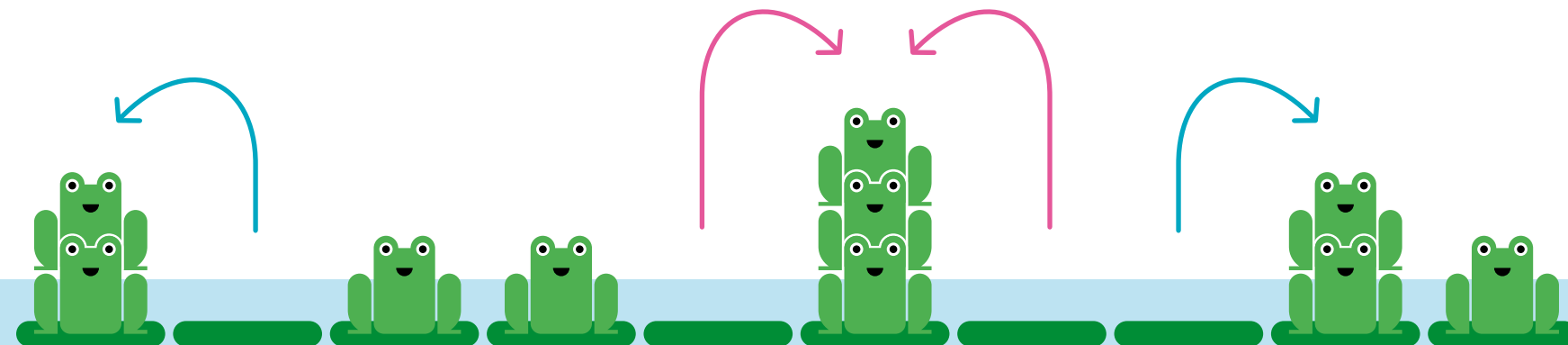
Bei 5 Fröschen wird sich die Prinzessin mit einer Riesenparty durchsetzen. Bei 6 Fröschen werden die **Prinzessin** und der **Froschprinz** am Ende zwei Partys haben. Unten siehst du die Mitte eines Spiels mit 10 Fröschen.

Nach den Sprüngen unten ist die Prinzessin an der Reihe. Welche Sprünge sollte sie sich überlegen?

SPOILERALARM!

Auf der nächsten Seite sind die rosa Sprünge die, die die Prinzessin bedenken sollte. Jeder dieser Sprünge führt zu zwei statt drei Partys.

Sahiba ist Schülerin einer Oberschule in Michigan, USA. Sie hat nationale Mathematikfestivals mit spielerischen Rätseln veranstaltet. Ihre Liebe zur Mathematik entwickelte sich aus Mathematikwettbewerben, Rätseln und dem Spaß am Lösen von Problemen.

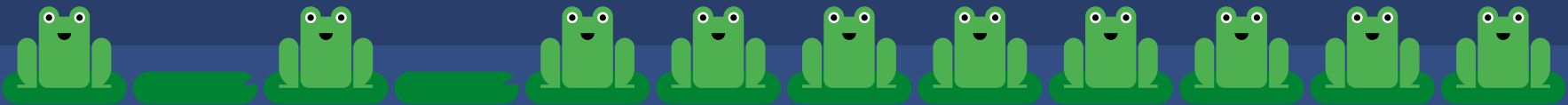


Eines Abends tauchen einige der Frösche nicht auf. Diese Partyverweigerer können eine große Party erheblich erschweren oder unmöglich machen. Die Frösche unten können es schaffen, aber es erfordert viel Froschdenken.

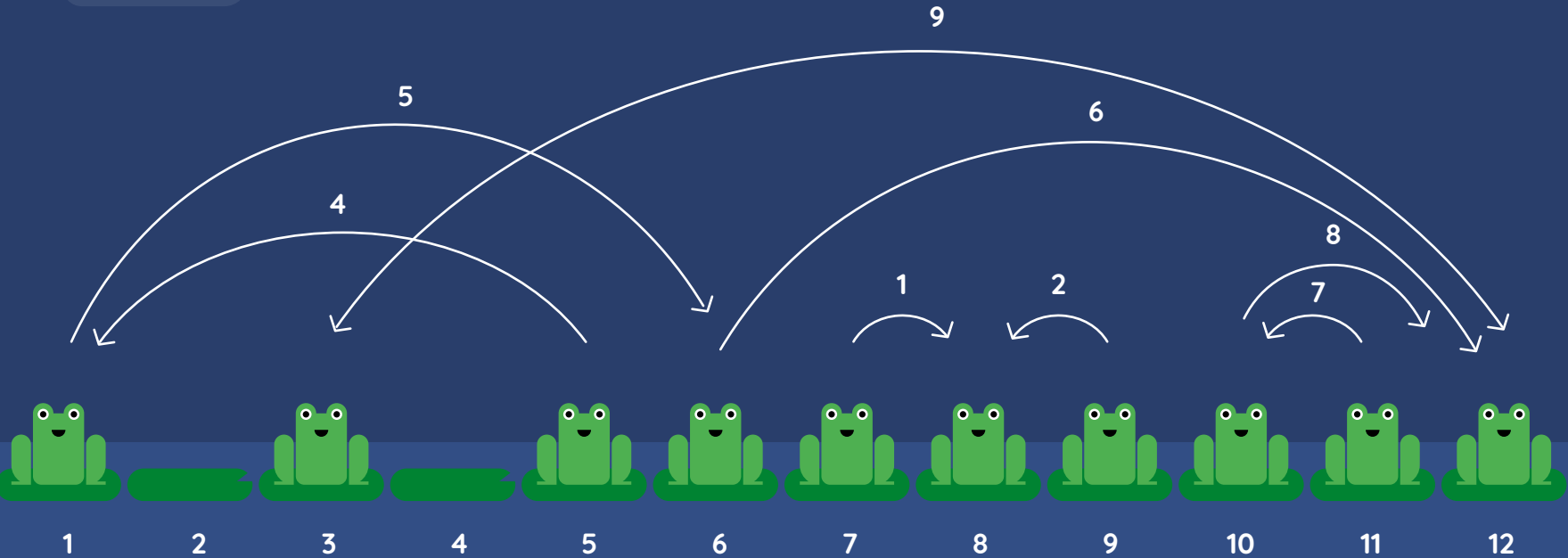
SPOILERALARM!



Dieses Rätsel könnte binär als 101011111111 verschlüsselt werden.	dann stattfinden kann, wenn niemand kommt!
Das ist nicht schön. Stattdessen sagen die Frösche, dass die kleinste Anzahl von Nachkommastellen, die benötigt wird, damit 1010 lösbar ist, acht ist.	Die Reihenfolge der kleinsten Binärzahlen, die eine zunehmende Anzahl von Nachkommastellen haben, beginnt wie folgt: 0, 101, 1001, 1010. Diese Zahlen können gelöst werden, indem man 0, 1, 2 bzw. 8 Einsen anhängt. Das sind böse Folgen für die Frösche, also werde ich aus Respekt nicht mehr darüber reden. Das ist auch gut so, denn ich weiß nicht, was die nächsten Bedingungen sind.
Die Frösche wollen herausfinden, wie viele Nachkommastellen es für jede Binärzahl mindestens gibt. Für viele ist die Antwort Null.	
Diese Zahlen haben einen besonderen Platz im Herzen eines jeden Frosches, denn sie bedeuten, dass eine Party auch	

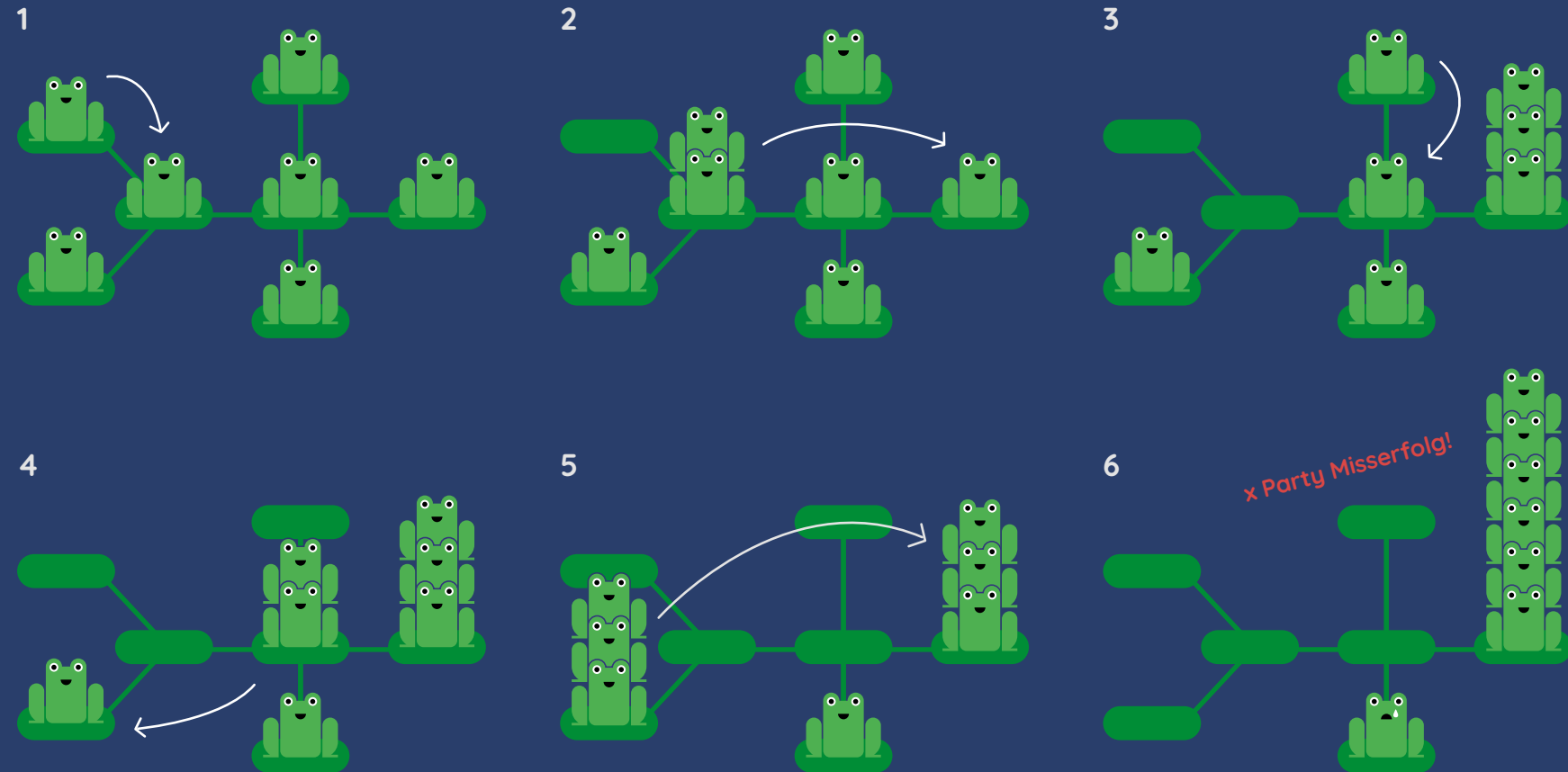


Diese Sprünge ermöglichen eine erfolgreiche Party für zehn Frösche. Sprung 3 wird nicht gezeigt, aber du kannst dir wahrscheinlich denken, wo er passiert ist.



Einige Frösche haben keine Lust mehr auf das Spiel, ihre Seerosenblätter in einer Reihe aufzustellen. Stattdessen versuchen sie etwas Neues mit neuen Regeln:

- Ein Frosch springt einmal, zwei Frösche springen zweimal, usw.
- Frösche können nicht auf ein leeres Seerosenblatt springen.
- Alle Seerosenblätter müssen miteinander verbunden sein.
- Wenn du die Sprungweite zählst, benutze verbundene Seerosenblätter.

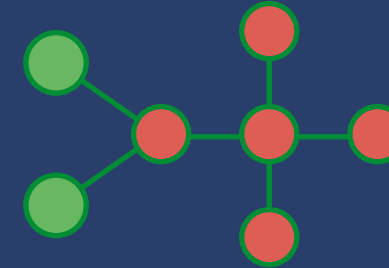


Auf welchen der sieben Seerosenblätter kann eine erfolgreiche Party gefeiert werden?

Manche Anordnungen von Seerosenblättern können nirgendwo eine erfolgreiche Party feiern. Finde die Anordnung mit den wenigsten Seerosenblättern, für die eine erfolgreiche Party unmöglich ist.

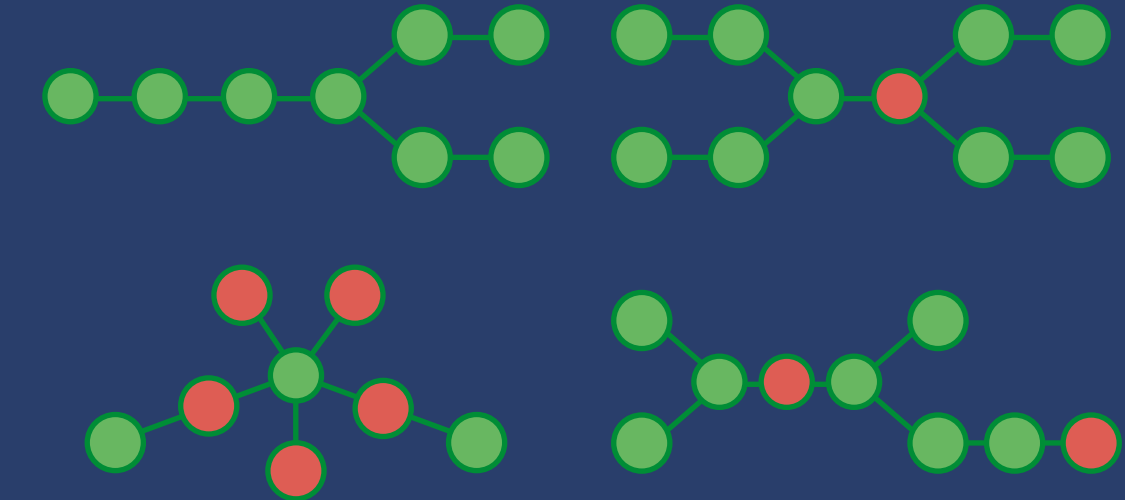
SPOILERALARM!

In dieser Anordnung gibt es nur zwei Seerosenblätter, auf denen Partys stattfinden können. **Malen wir sie grün an.**

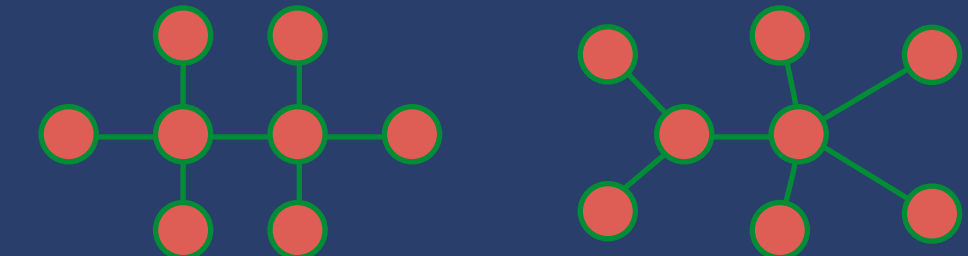


Alle Anordnungen mit sieben Seerosenblättern haben mindestens ein Seerosenblatt, in dem eine erfolgreiche Party stattfinden kann. Das gilt auch für alle Anordnungen mit weniger Seerosenblättern.

Die meisten Anordnungen mit acht Seerosenblättern funktionieren auch. Hier sind vier:



Es gibt zwei Anordnungen von acht Seerosenblättern, die auf keinem Seerosenblatt eine Party feiern können:



Matej Veselovac ist verantwortlich für diese tolle Erweiterung des linearen Rätsels auf Bäume.

Vielen Dank, Matej. 😊

Ich überlasse es den neugierigen Lesern, Fragen dazu zu stellen:

- Wo kann eine Froschkönigin anfangen und trotzdem eine erfolgreiche Party feiern?
- Diagramme, die keine Bäume sind.

DIE UKRAINE AUSMALEN

Dies ist eine Karte der Ukraine.

Regionen, die eine gemeinsame Grenze haben, sind unterschiedlich markiert.



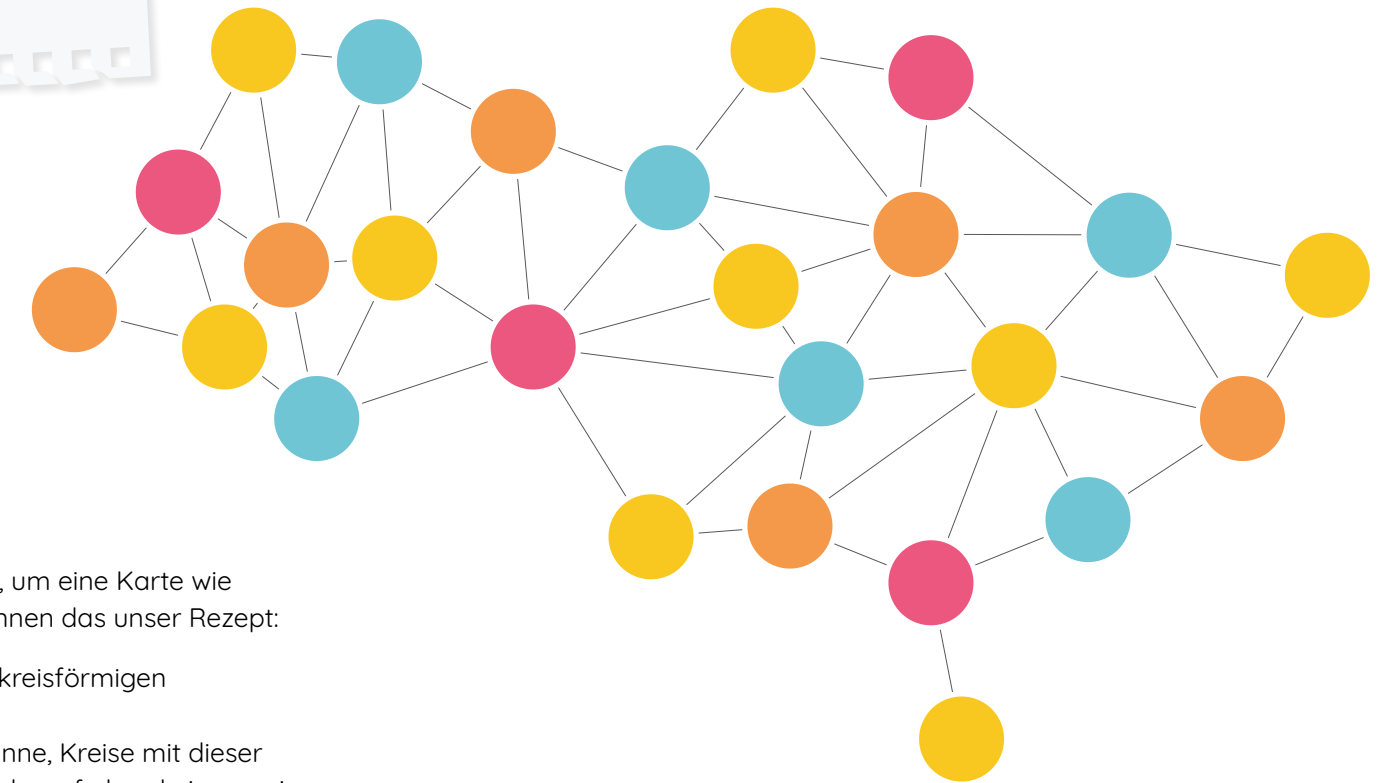
Die gesamte Karte hat nur vier Farben.



- Welche Farbe wird am meisten benutzt?
- Welche Farbe wird am wenigsten benutzt?

This is the same map of Ukraine. The regions are represented by circles. Any two regions that shared an edge on the previous map are now connected.

Gelb ist die häufigste Farbe. Rosa ist die seltenste.

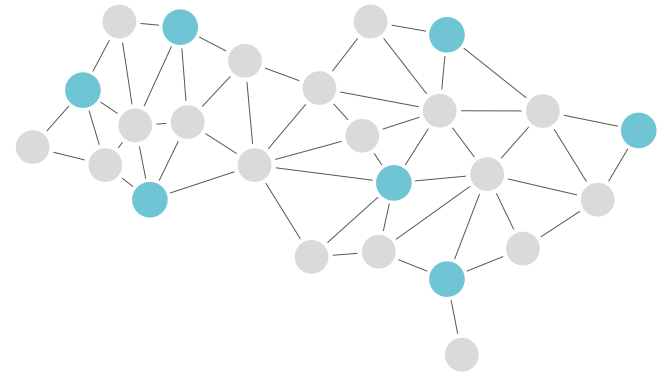


Hier sind ein paar Schritte, um eine Karte wie diese auszumalen. Wir nennen das unser Rezept:

1. Beginne mit farblosen kreisförmigen Regionen.
2. Wähle eine Farbe. Beginne, Kreise mit dieser Farbe zu malen. Achte darauf, dass keine zwei Kreise mit der gleichen Farbe miteinander verbunden sind. Wiederhole den Vorgang, bis du keine Kreise mehr ausmalen kannst.
3. Wiederhole "2", bis die Karte vollständig ausgemalt ist.

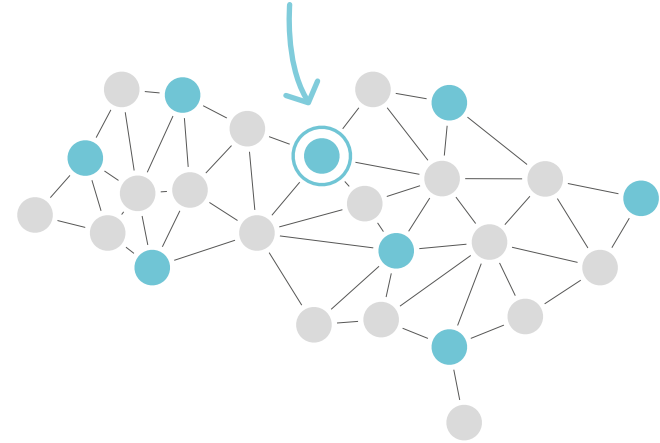
1.

1. Wir beginnen mit der Farbe **Blau** und folgen dem Rezept. Können wir jetzt aufhören, **Blau** zu benutzen?



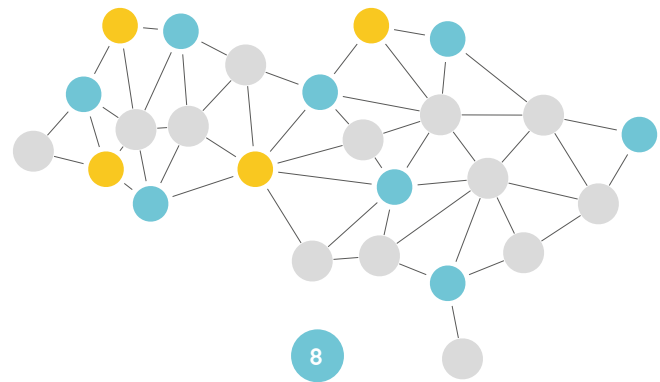
2.

2. Nein, wir müssen so lange mit **Blau** malen, bis es keine neuen Kreise mehr gibt, die **blau** gemalt werden können.



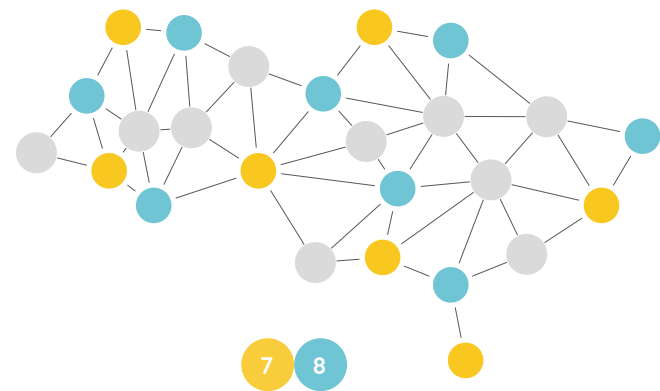
3.

3. Wir haben 8 Kreise **blau** gemalt. Lass uns die "8" an einer auffälligen Stelle platzieren und mit einer anderen Farbe malen. Nehmen wir **Gelb**.



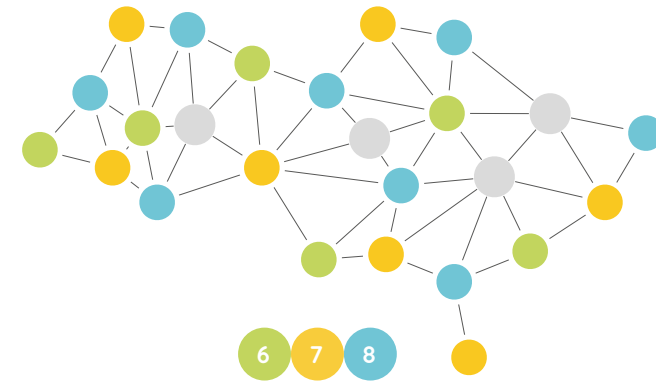
4.

Wir malten weiter, bis wir sieben gelbe Kreise hatten. Können wir noch einen **gelben** Kreis malen? Nein - jeder weitere Kreis, den wir malen, würde mit einem anderen **gelben** Kreis verbunden sein.



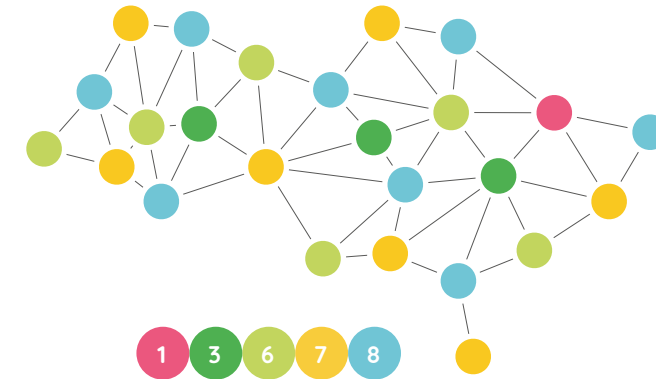
5.

Als nächstes malen wir 6 **hellgrüne** Kreise aus. Du siehst, dass wir beim Ausmalen unserer Karte eine Zahl bilden. Unsere Zahl ist jetzt 678, aber wir sind noch nicht fertig.



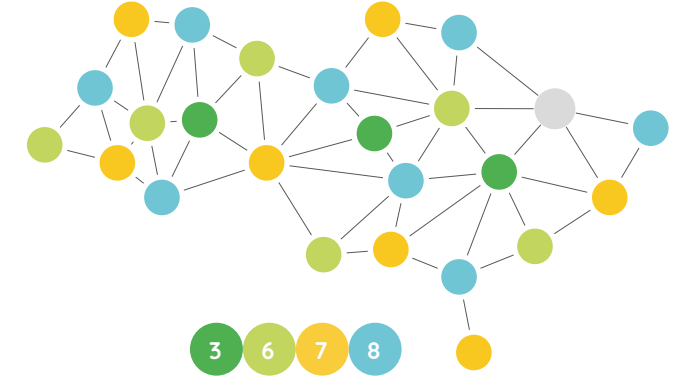
7.

Zum Schluss fügen wir ein einzelnes **Rosa** hinzu. Unsere Karte ist fertig. Sie erhält die Nummer 13.678.



6.

Wir fügen drei **dunkelgrüne** hinzu. Es gab eigentlich keine Möglichkeit, mehr oder weniger hinzuzufügen. Unsere Zahl ist jetzt 3.678.



Die **Blautöne** stehen für die Anzahl der Einheiten.
Die **Gelbtöne** stehen für die Anzahl der Zehner.
Die **hellen Grüntöne** stehen für die Anzahl der Hunderter.
Die **dunklen Grüntöne** stehen für die Anzahl der Tausender.
Das **Rosa** steht für die Zahl der Zehntausend.

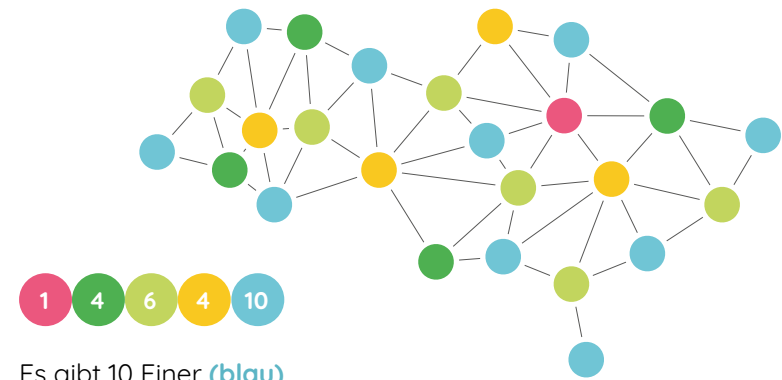
- Was ist die größte Zahl, die du durch Ausmalen der Ukraine erhalten kannst?
- Was ist die kleinste Zahl, die du bekommen kannst?

Ich werde meine höchsten und niedrigsten Zahlen auf ein paar Seiten mitteilen.

SPOILERALARM!

8.

Manchmal hast du am Ende zehn oder mehr Kreise in einer Farbe. Das ist in Ordnung. Das bedeutet nur, dass du noch ein bisschen nachdenken musst. Wie lautet die Zahl für diese Farbe?



Es gibt 10 Einer (blau)
Es gibt 4 Zehner (gelb)
Es gibt 6 Hunderter (hellgrün)
Es gibt 4 Tausender (dunkelgrün)
Es gibt 1 Zehntausender (rosa)

Insgesamt: 14.650

Um eine große Zahl zu erhalten, musst du eigentlich bei jedem Schritt unseres Rezepts weniger Kreise ausmalen! Dieses Paradoxon zu lösen, macht den Kindern Spaß! Füttere sie nicht mit dem Löffel, sondern bitte sie, darüber nachzudenken, wenn sie immer wieder über eine kleine Zahl stolpern, während sie eigentlich eine große Zahl finden wollten.



Statt dich auf eine komplizierte Karte wie die Ukraine zu stürzen, kannst du auch eine einfachere Karte wie die unten stehenden ausmalen.

Diese einfachen Karten regen Kinder dazu an, Verallgemeinerungen zu treffen, die bei den chaotischeren Karten der realen Welt unmöglich sind. **Rätsel und Probleme aus der realen Welt sind nicht immer die besten.**

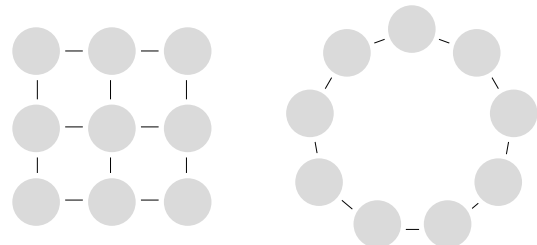


Male Flusskarten der Länge 2-9 aus. Was sind die kleinsten und größten möglichen Zahlen? Fische haben diese Karten in ihren Hosentaschen, falls sie sich auf dem Weg zu ihren Laichgründen verirren.



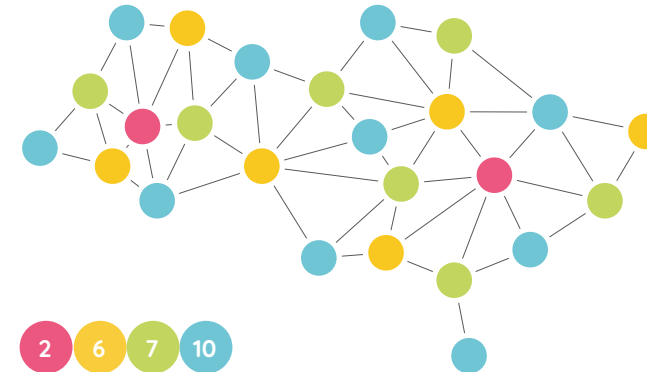
Enten schwimmen gerne Kreise in Seen mit einem Umfang von 3-10 Kreisen. Manche Primaten laufen gerne in Städten und Dörfern mit einem Umfang von 3x3, 4x4 und 5x5 Kreisen herum, wie auf dem Bild rechts. **Was sind die kleinsten und größten möglichen Zahlen?**

SPOILERALARM!



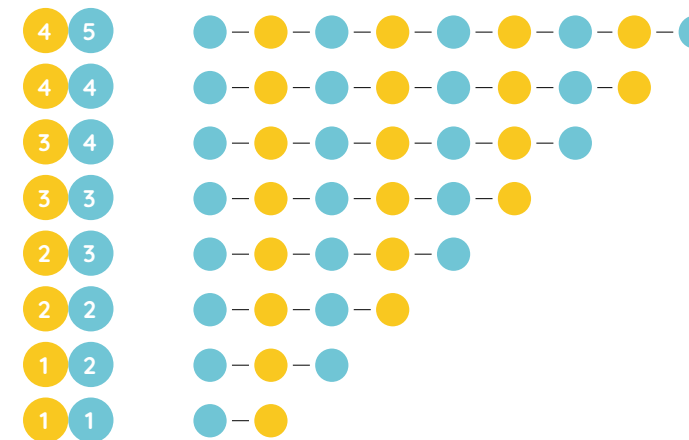
9.

Die kleinste Zahl, die ich für die Ukraine herausgefunden habe, ist $2670 + 10 = 2680$.



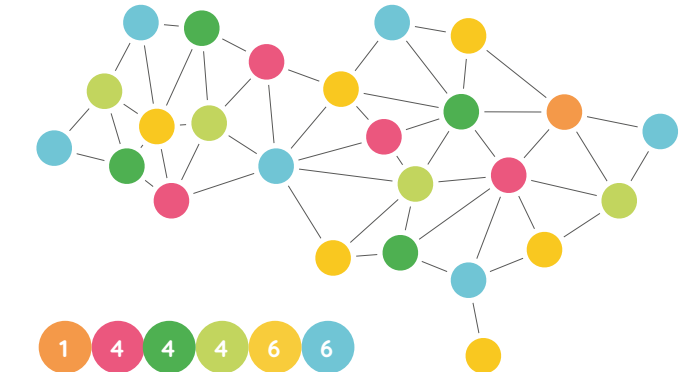
11.

Flüsse können mit zwei Farben angemalt werden. Hier sind die niedrigsten möglichen Zahlen. Siehst du das Muster?



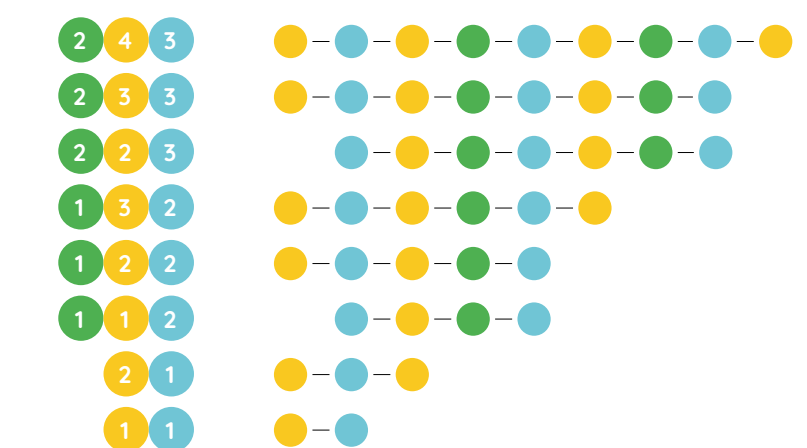
10.

Die größte Zahl, die ich gefunden habe, ist 144.466.



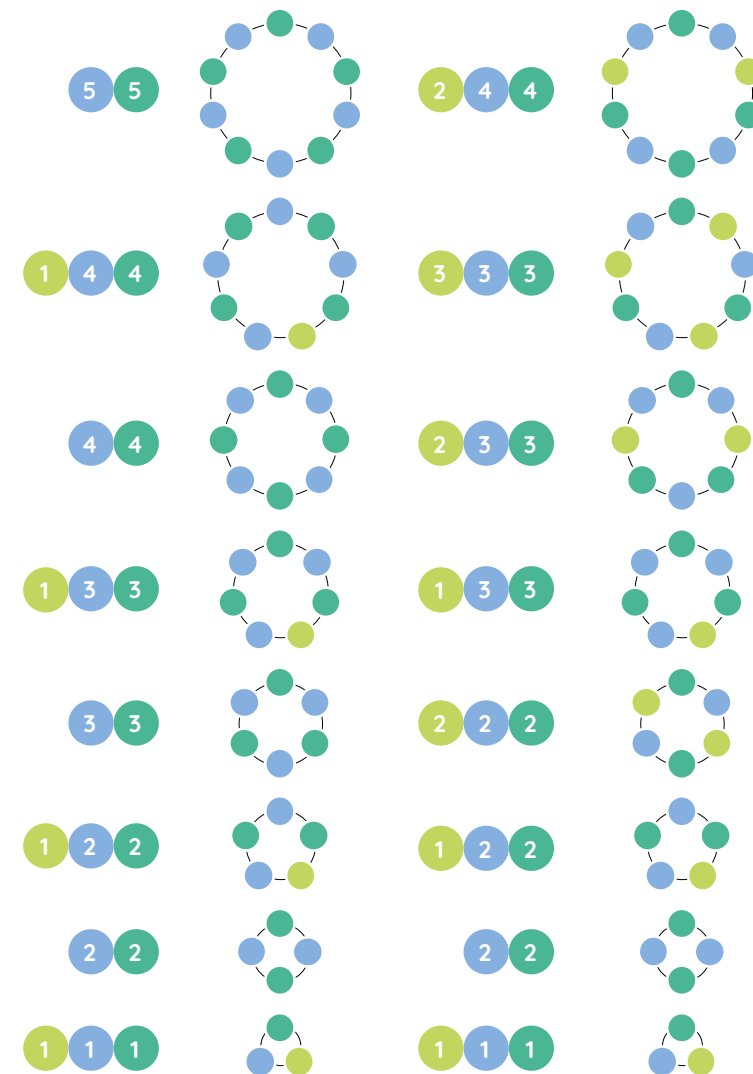
12.

Alle Flüsse der Länge 4+ können mit drei Farben angemalt werden. Hier sind die höchsten Zahlen möglich. Das Muster ist ein wenig komplexer.

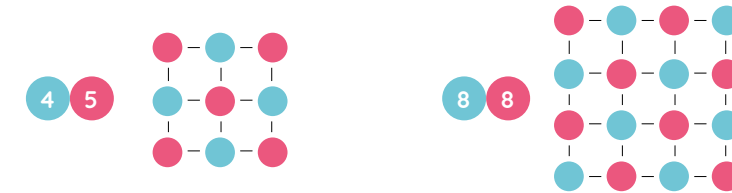


13.

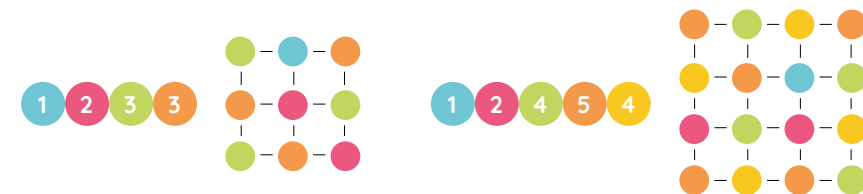
Seen können mit zwei oder drei Farben angemalt werden, je nachdem, ob sie einen geraden oder ungeraden Umfang haben. Hier sind die kleinsten und größten Zahlen:



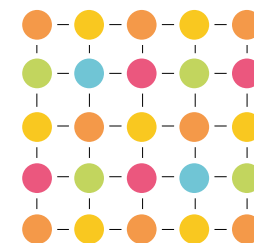
Alle Städte und Dörfer können mit zwei Farben ausgemalt werden. Die kleinsten Zahlen haben alle eine Färbung mit einem Schachbrettmuster.



Die größte Zahl ist viel schwieriger zu finden. Ich bin mir nicht sicher, ob das die besten sind, aber es hat eine Stunde gedauert, sie zu finden, und das reicht. 😊



2 4 4 8 7



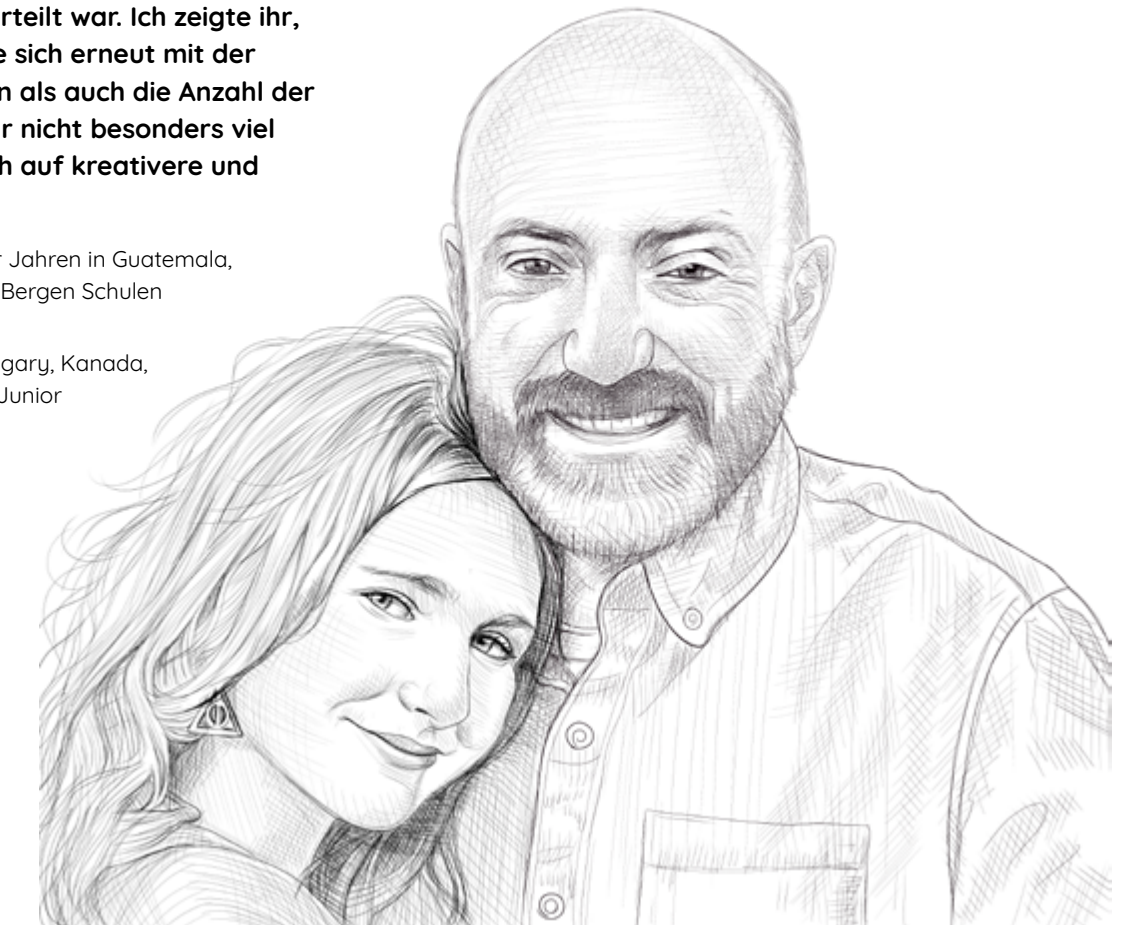
Schönheit ist dein höchster Anspruch. Die Schüler sollen stolz auf ihre Arbeit sein. Für manche bedeutet das bunte Puzzelbögen. Für andere sind es Zahlenmuster, die scharf und präzise sind.

Entwirf mit so wenigen Kreisen wie möglich eine Karte ohne sich überschneidende Verbindungslinien, deren größte Zahl größer als eine Million ist. **SPOILERALARM!**

Ich habe meiner Tochter Acadia "Die Ukraine ausmalen" gezeigt. Ihre erste Reaktion war: "Gibt es so viele Regionen in der Ukraine?" Aber dann hat sie versucht, Gord zu schlagen! Wir unterhielten uns darüber, wo Russland gerade einmarschiert und belagert, über die Geschichte des Landes und darüber, wie ich die Ukraine 1993 besucht habe. Nachdem wir die Ukraine ausgemalt hatten, holte ich eine Karte von Guatemala hervor, die in die 22 Provinzen des Landes unterteilt war. Ich zeigte ihr, wo Acadia geboren wurde, und sie beschäftigte sich erneut mit der Herausforderung, sowohl die Anzahl der Farben als auch die Anzahl der Farben zu erhöhen. Da ihr Mathe in diesem Jahr nicht besonders viel Spaß gemacht hat, freue ich mich, wenn sie sich auf kreativere und relationalere Weise mit Mathe beschäftigt.

Zaak und seine junge Familie lebten in den frühen 2000er Jahren in Guatemala, wo sie in einem Maya-sprachigen Gebiet in den zentralen Bergen Schulen aufbauten. Acadia wurde dort geboren.

Zaak und **Acadia** und ihre ganze Familie leben jetzt in Calgary, Kanada, wo Zaak als Highschool-Lehrer und Acadia Schülerin der Junior Highschool sind.

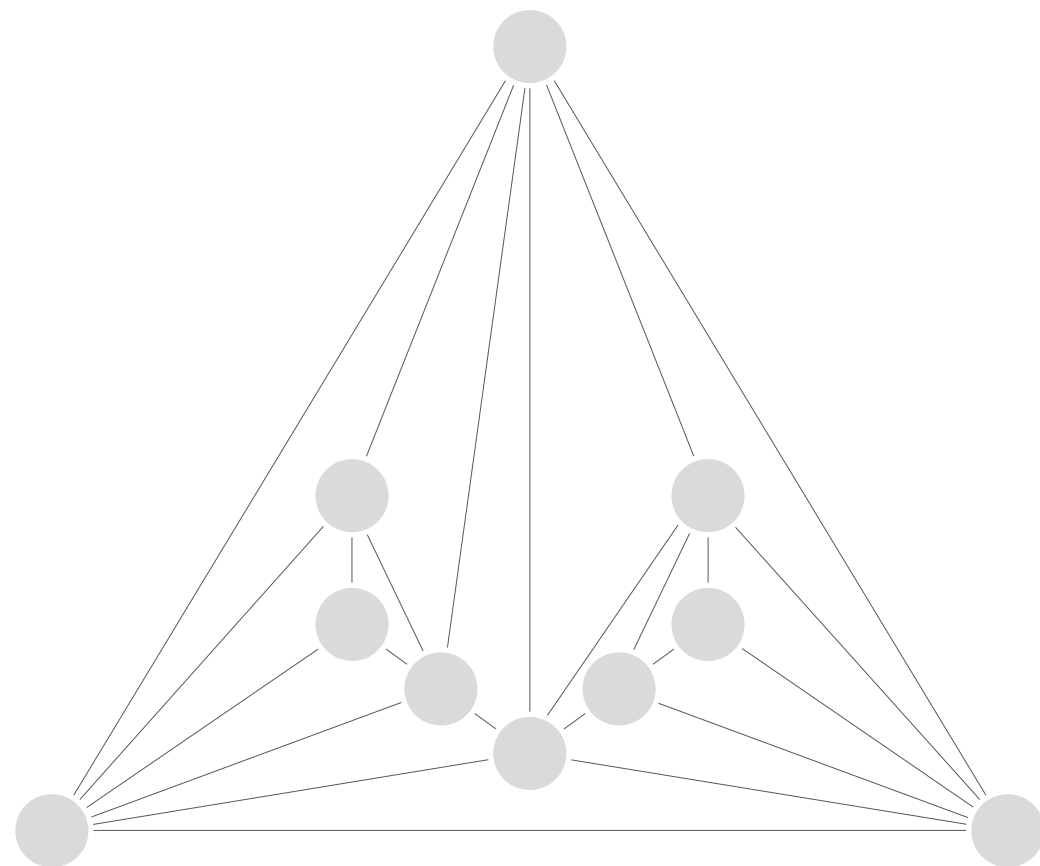


Hier ist eine Karte mit nur zehn Kreisen, die mit unserem Algorithmus so bemalt werden können, dass eine Zahl größer als eine Million entsteht. Mach es!

SPOILERALARM!

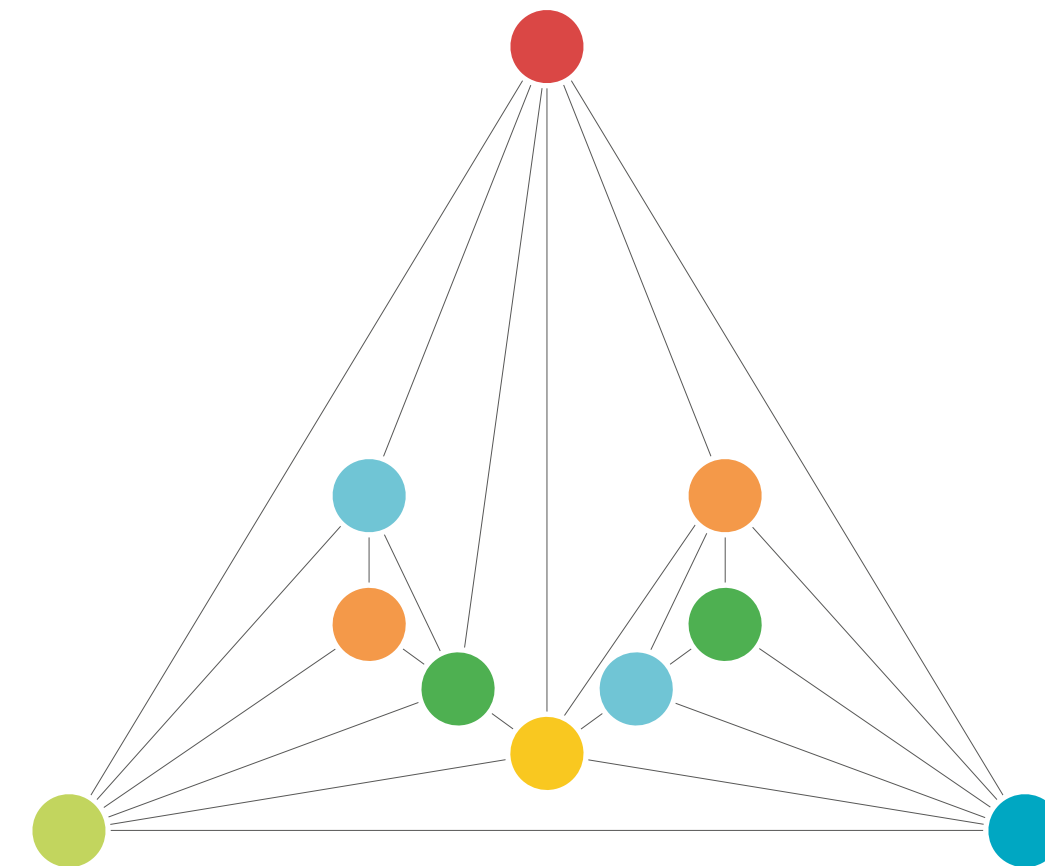


Einigen von euch wird es vielleicht nicht gefallen, dass ich dieses Rätsel im Dezimalsystem erstellt habe. Für euch und für Schülerinnen und Schüler in höheren Klassen sollte dieses Rätsel in einer beliebig großen Basis sein. Kompromisse wie dieser sind notwendig, um Rätsel für jüngere Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen.



Ein Paar Kinder sind mit dem Ausmalen einer Karte fertig, aber du bist mit den anderen beschäftigt. Was kannst du schnell tun, damit alle beschäftigt sind? Hier sind einige Möglichkeiten:

- Ein weiteres Paar ist ebenfalls fertig. Du bewegst die beiden Paare dazu, ihre Antworten zu vergleichen.
- Gib dem Paar eine Karte eines anderen Landes.
- Bitte sie, ihre eigene Karte zu gestalten oder sich vereinfachte "Länder" wie die Flüsse und Seen zu überlegen.

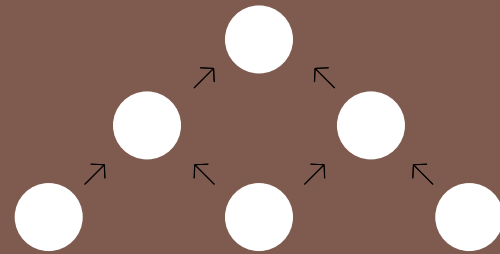


1 1 1 1 2 2 2

ERKLIMME EINEN BERG!

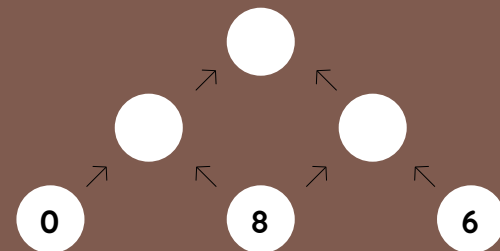
Genug vom Bildschirm!
Es ist Zeit, einen Berg zu erklimmen!

Fülle jeden Kreis am Fuß des Berges mit einer ganzen Zahl aus - null oder größer. Du darfst beim Erklimmen nicht zweimal dieselbe ganze Zahl benutzen.



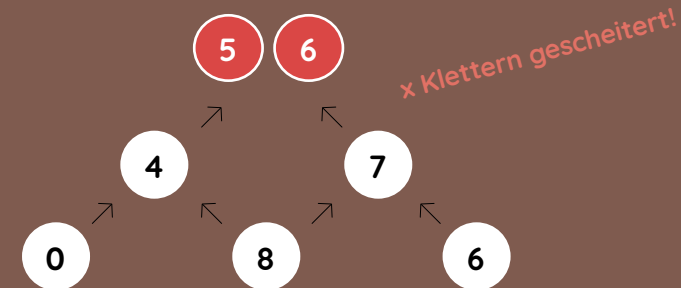
Es kann sein, dass nicht alle Kreise in der nächsthöheren Reihe erklommen werden können. Fülle nach Möglichkeit jeden Kreis in der nächsten Reihe mit ganzen Zahlen, die genau in der Mitte der beiden darunter liegenden liegen.

Genau in der Mitte zwischen 0 und 8 ist 4. **Gut!**
Genau in der Mitte zwischen 8 und 6 ist die 7. **Gut!**



Weiter den Berg hinauf. Leider haben die 4 und die 7 keine ganze Zahl genau in der Mitte zwischen ihnen... Die 5 liegt zu nah an der 4... Die 6 liegt zu nah an der 7.

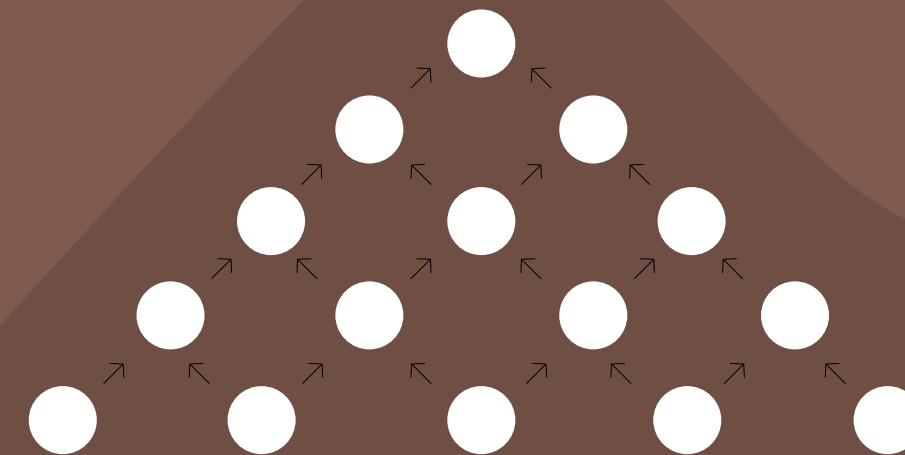
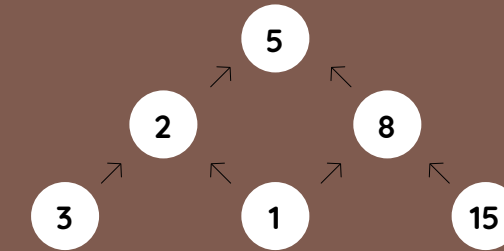
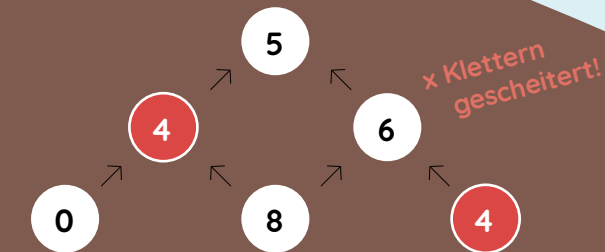
Wir haben es nicht geschafft, diesen Berg zu erklimmen. Finde drei ganze Zahlen - null oder größer -, mit denen wir diesen Berg erklimmen können.



Diese Expedition sieht zwar so aus, als wäre sie erfolgreich gewesen, aber irgendetwas ist falsch. Es scheitert daran, dass wir eine ganze Zahl nicht wiederverwenden können. **Wir haben zwei Vieren verwendet.**

Diese hier funktioniert. Es gibt viele Möglichkeiten, diesen Berg zu erklimmen.

Was ist die kleinste Zahl, die du auf dem Gipfel eines erfolgreich erklommenen Berges findest? Hier haben wir eine 5 gefunden. Hätten wir auch eine 4, 3 oder 2 finden können?



Finde einen Weg, diesen höheren Berg zu erklimmen. Was ist die kleinste Zahl, die du auf jedem Gipfel findest?

SPOILERALARM!



Ich wünschte, ich hätte "Erklimme einen Berg!" schon in der Grundschule gehabt, denn das ist genau die Art von Rätsel, die mir Spaß gemacht hätte. Es ist leicht, loszulegen, zu experimentieren, zu erforschen und Entdeckungen zu machen. Und als Elternteil, das sich für die mathematische Bildung interessiert, finde ich es toll, dass dieses Puzzle das Zahlenverständnis auf eine ansprechende Weise fördert.

Nancy Blachman San Mateo, USA

Nancy ist die Gründerin des Julia-Robinson-Mathematikfestivals. Schon als Kind liebte sie es, an der Seite ihres Vaters, des Mathematikers Nelson Blachman, Mathematik zu spielen.



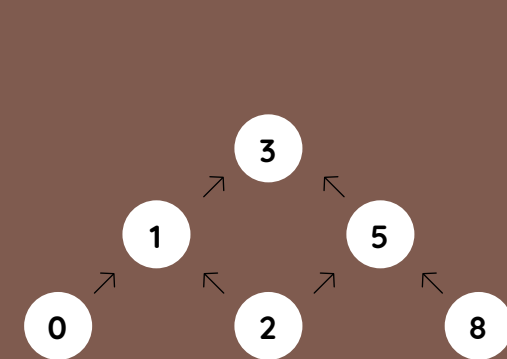
Eines meiner Lieblingsrätsel im Moment heißt Erklimme einen Berg! Ich finde es toll, wie Gord vermutet hat, dass der Höchstwert 10 sein würde. Aber herauszufinden, dass ein Kind das schafft, macht uns klar, wie klug unsere Kinder sind.

Erik van Haren Sint Anthonis, Niederlande

Erik ist der niederländische Mathepsychologe. Er ist der Direktor von mathplay.eu und Herausgeber von Rätseln und pädagogischen Hilfsmitteln, die Lehrern im Unterricht helfen.

Ein ganzes Jahr lang dachte ich, ich hätte ein Muster gefunden, das den kleinsten Spitzenwert für einen Berg beliebiger Größe angibt. Das war ein wunderschönes Muster. Hier ist es. Stell dir vor, du wanderst die linke Seite dieser Berge hinauf...

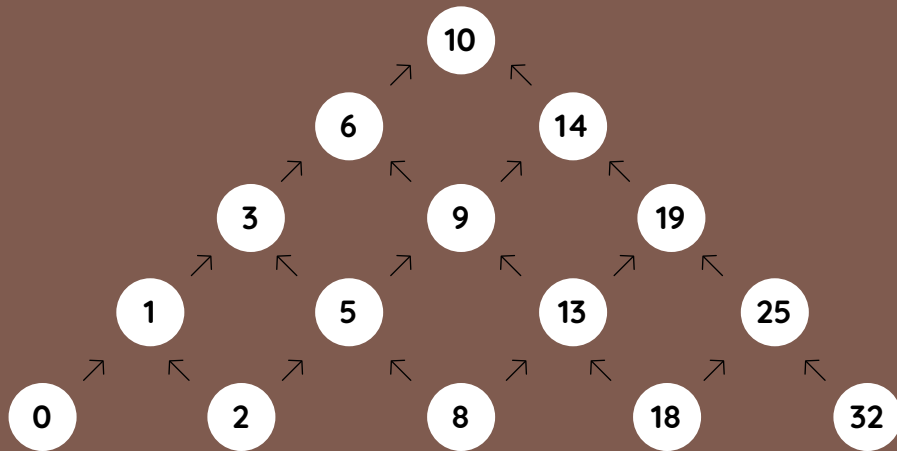
0, 1, 3, 6, 10... = 0, 0+1, 0+1+2, 0+1+2+3, 0+1+2+3+4...



Das Muster auf der Unterseite dieser Berge ist genauso schön...

0, 2, 8, 18, 32... = 0, (1)+(1), (2+2)+(2+2), (3+3+3)+(3+3+3), (4+4+4+4)+(4+4+4+4)...

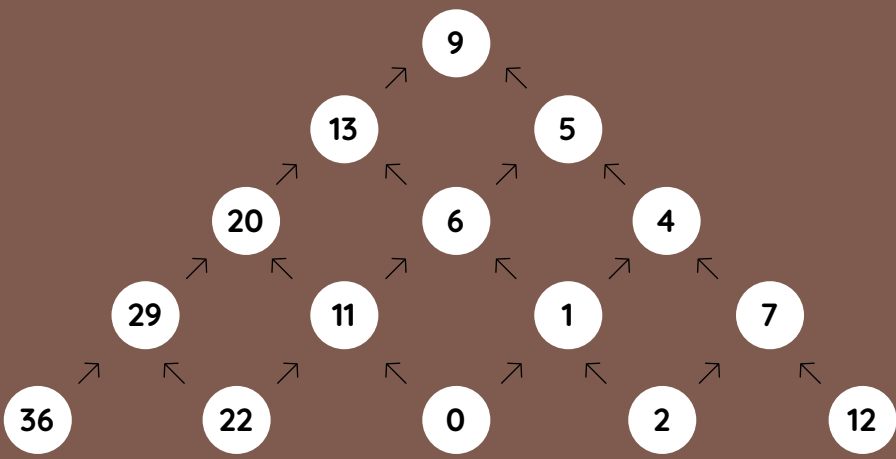
Das ist alles großartig. Es ist aber auch falsch.



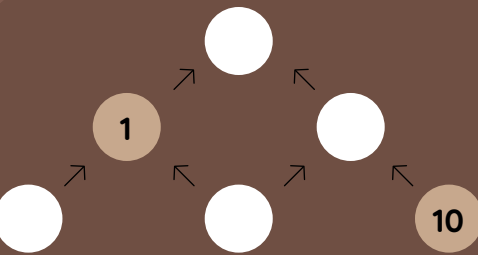
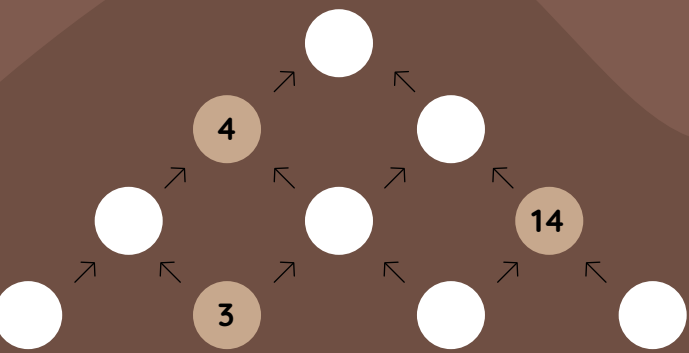
Nach einem Jahr hat ein Schüler einen 5er-Berg gefunden, der bestiegen werden kann und eine 9 auf der Spitze hat!

Die Lösung des Schülers zeige ich auf der nächsten Seite.

SPOILERALARM!



Ein paar Jahre nach dieser Schülerlösung fand Brad Ballinger (Fachbereich Mathematik an der Cal Poly Humboldt) einen 5 hohen Berg mit 8 an der Spitze. (Tipp: Die fünf ganzen Zahlen am unteren Ende sind 0, 2, 10, 24, 56 in irgendeiner verquerten Anordnung. 😊)
Statt nach einem möglichst kleinen Gipfel zu fragen, fordert Neil Calkin (School of Mathematical and Statistical Sciences an der Clemson University) die Schüler auf, Berge zu finden, bei denen die größte Zahl so klein wie möglich ist. 🥒

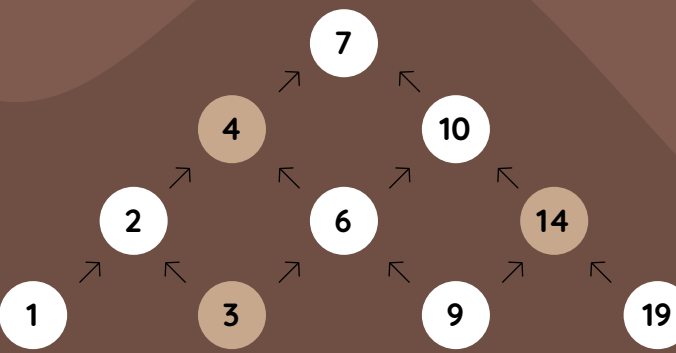
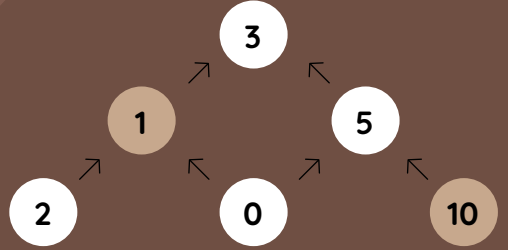


Aaron Holmes - ein Elternteil von drei Grundschulern in der Nähe von Calgary, Alberta, Kanada - meint, dass Schüler Spaß daran haben werden, die fehlenden ganzen Zahlen in diesen erfolgreich erklommenen Bergen zu ergänzen.

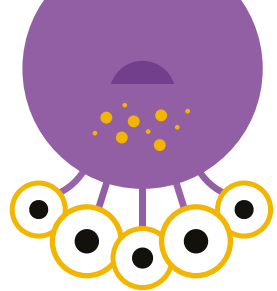
SPOILERALARM!

Schüler in älteren Klassenstufen können auch Spaß daran haben, Puzzles im Stil von Aaron zu erstellen. Zuerst erklimmen sie einen Berg und löschen dann Zahlen aus, bis nur noch wenige übrig sind. **Das Schwierigste ist, sicherzustellen, dass ihr Rätsel nur eine Lösung hat.** 🍏

Lösung für Aarons Rätsel



Die Schüler in deiner Klasse haben vielleicht Mühe, den 4 hohen Berg zu erklimmen. **Das ist nicht schlimm.** Sie werden es ein Stück weit nach oben schaffen. Zeige ihnen keine besseren Lösungen und lass ihre Seifenblase platzen. 😊 Lasse sie glauben, dass sie die Ersten sind, die diese Berge erklimmen! Feiere jeden ihrer Mini-Erfolge öffentlich - vor allem die von Kindern mit Schwierigkeiten. 🍏



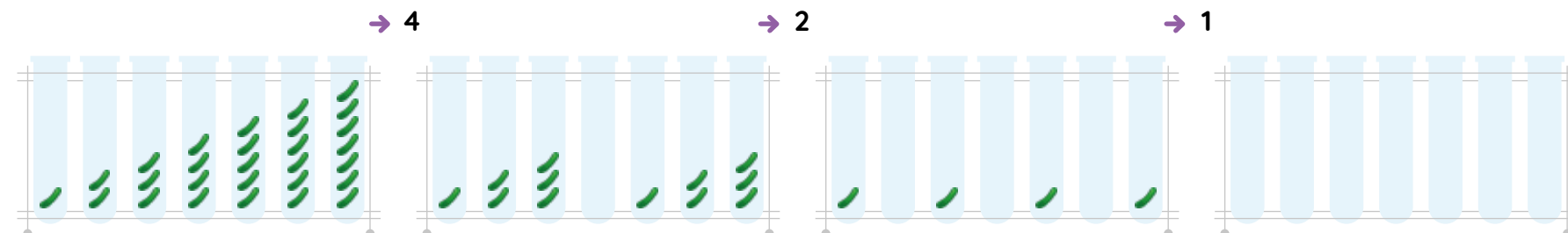
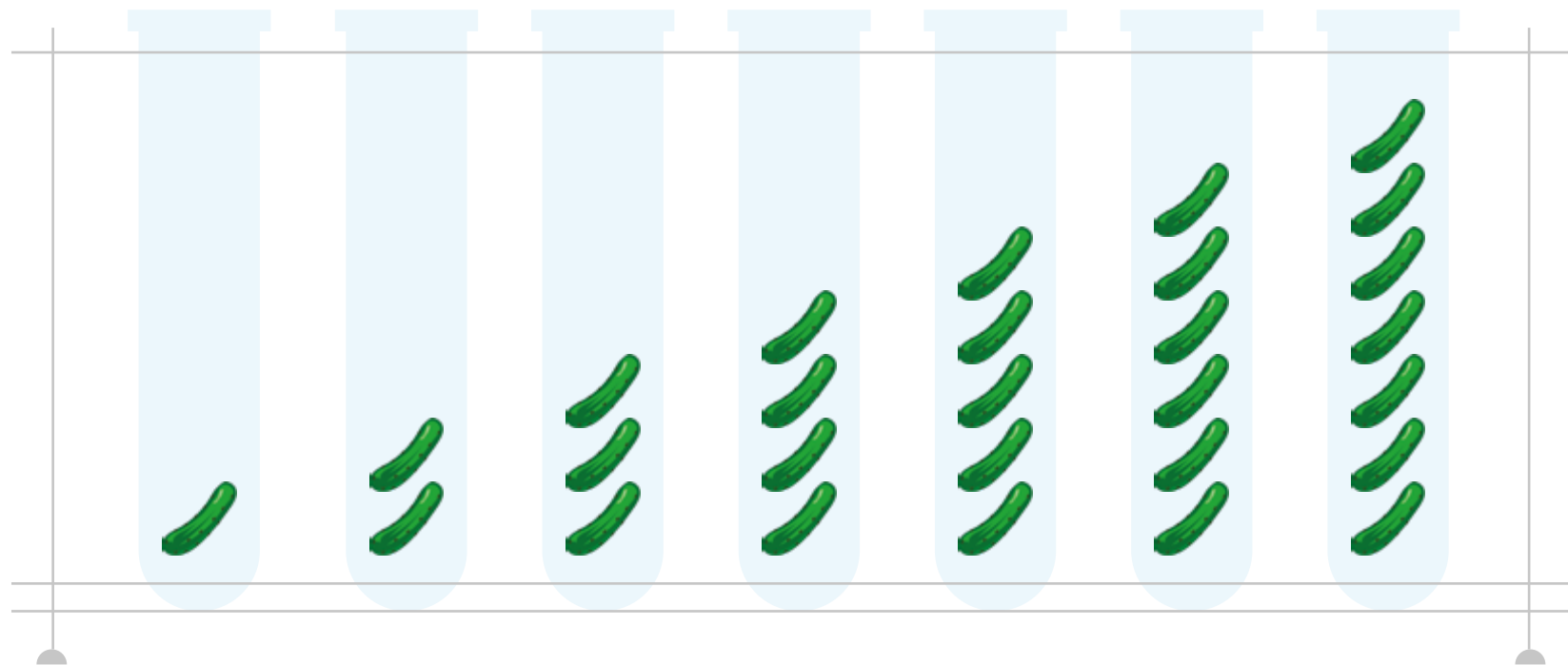
Das gierige Gurkenmonster

Es gibt sieben Gläser mit 1-7

Gurken. Jeden Tag wählt das Gierige Gurkenmonster eine Zahl und isst genau diese Anzahl von Gurken aus so vielen Gläsern wie möglich.

Was passiert zum Beispiel, wenn das Gierige Gurkenmonster die Zahl 5 auswählt? Es wird 5 Gurken aus den Gläsern mit 5, 6 und 7 Gurken essen. Die anderen Gläser wird es nicht anrühren.

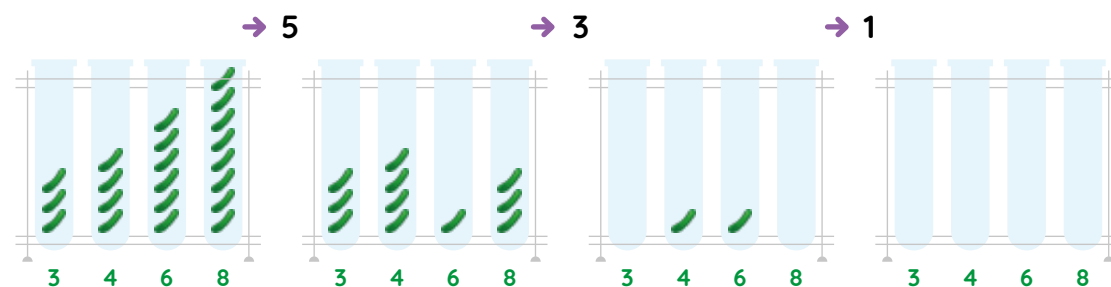
Dem gierigen Gurkenmonster mangelt es an Disziplin. Zeige, dass es alle Gurken in drei Tagen essen kann, wenn es richtig nachdenkt.



Die einzige Möglichkeit, wie das gierige Gurkenmonster alle Gläser in drei Tagen leeren kann, ist, zuerst 4, dann 2 und dann 1 auszuwählen.

Ich habe Phillip, einen Jungen aus der 2. Klasse, gebeten, eine Anzahl von Gurken zu wählen, die er aus diesen 1-7 Gläsern nehmen kann. Seine Antwort war "200 Millionen" und er kicherte und schaute sich bei seinen Mitschülern um. Wie reagierst du, wenn ein Kind absichtlich eine lächerliche Antwort gibt? Das Kind will nur Aufmerksamkeit.

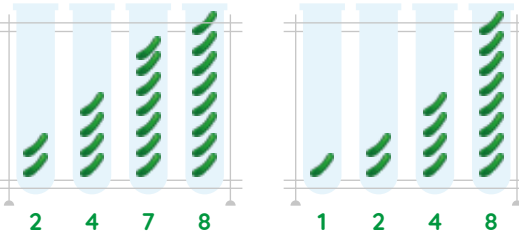
Deine Aufgabe ist es, seinen Vorschlag als eine ganz normale Antwort zu behandeln und mit dem nächsten Schüler weiterzumachen: "200 Millionen. Das ist eine Menge. Leider bekommst du keine Gurken, Phillip. Jane - du bist dran. Wie viele Essiggurken möchtest du auswählen?"



Vier Gläser mit jeweils höchstens acht Gurken können normalerweise in drei Tagen geleert werden. Vier Gläser mit oben mit 3, 4, 6 und 8 Gurken sind ein perfektes Beispiel. Finde die beiden Beispiele, bei denen die Gläser nicht in drei Tagen geleert werden können.

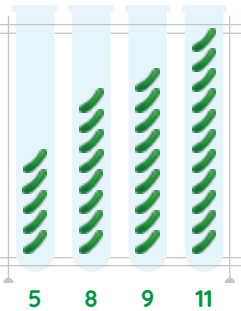
SPOILERALARM!

Es gibt zwei Sets mit vier Gläsern, die höchstens acht Gurken enthalten und nicht in drei Tagen geleert werden können:



Finde einen Weg, wie das Gierige Gurkenmonster diese vier Gläser in drei Tagen leeren kann.

SPOILERALARM!



Nach einer Weile hörst du auf, die Gurken zu zeichnen. Ich weiß, dass sie unterhaltsam sind und du das Knacken bei jedem Biss in deinem Kopf hörst, aber es wird anstrengend. 😊 Ich habe lange gebraucht, um herauszufinden, dass {9,11,16,18,19} in nur vier Tagen gelöst werden kann. **Und wie?**

SPOILERALARM!

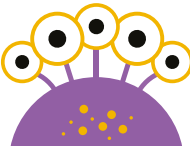
Nachdem du die Zahlen in den Gläsern aufgeschrieben hast, solltest du den Schülern klar machen, dass die Reihenfolge der Gläser keine Rolle spielt, aber die Reihenfolge, in der sie jeden Tag Zahlen auswählen, zählt!



Bitte einen Schüler, die Zahlen 1-20 der Gurken in einem Glas zu nennen (oder würfle mit einem zwanzigseitigen Würfel). Das kannst du mit anderen Schülern wiederholen, bis du fünf Gläser mit Gurken hast. Gib deiner Klasse 71 Sekunden Zeit, um den besten Weg zu finden, die Gläser zu leeren. Nach 71 Sekunden: Stifte hinlegen. Welche Gruppen haben es geschafft, die Gläser zu leeren? Welche Gruppen haben es in den wenigsten Tagen geschafft?

Die 71 Sekunden reichen den besten Schülern nicht aus, um wirklich etwas herauszufinden, damit die anderen Kinder gewinnen können. **So wird der Zeitdruck auf eine gute Weise genutzt!**

Gib die gleichen Rätsel mit nach Hause, ohne sie zu Hausaufgaben zu machen. Vielleicht finden du oder einige Schüler am nächsten Tag eine bessere Lösung. Achte auf das Verhalten, das deine Schüler nachahmen

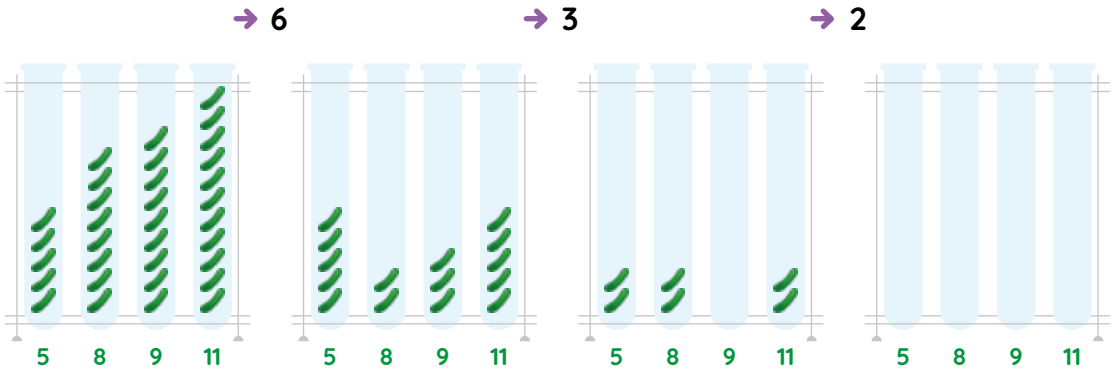


Die ersten sieben Primzahlen {2,3,5,7,11,13,17} können in vier Tagen geleert werden. Aber wie?

Die ersten elf {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31} können durch viele Leerungssequenzen in fünf Tagen geleert werden. **Und wie?**

SPOILERALARM!

Die einzige Möglichkeit, die Gläser {5,8,9,11} in drei Tagen zu leeren, ist **6 → 3 → 2**



Die Gläser {9,11,16,18,19} können auf diese Weise geleert werden: **6 → 10 → 3 → 2**

Meine Grundschulklassen folgen einem Muster. In den ersten fünfzehn Minuten erkläre ich das Rätsel. Dazu zähle ich nicht die Regeln auf. Stattdessen liegt der Schwerpunkt auf dem emotionalen Engagement. In der Regel fangen wir sofort damit an, dass die Klasse und ich ein Rätsel nicht lösen können. Die Regeln tauchen nach und nach auf.

Nach einer Viertelstunde oder wenn ich denke, dass etwa 85% der Klasse wissen, wie es weitergeht, ist es an der Zeit, Schülerpaare zu bilden. Wie werden die Paare gebildet? Hier sind einige Möglichkeiten:

- Von Schülern ausgewählte Paare.** (Einfach) Ein gefährliches Zeichen, auf das du achten solltest, ist soziale Angst, wenn unbeliebte Kinder ausgegrenzt werden.
- Puzzle-Blatt-Paarungen.** (Einfach) Bevor die Paare ausgewählt werden, verteilst du an die Hälfte der Kinder in der Klasse ein Rätselblatt. Diese Kinder wählen dann

einen Partner, mit dem sie ihr Rätselblatt teilen. Soziale Ängste sind immer noch die Hauptgefahr.

- Tisch-Paarungen.** (Einfach) Diese Variante braucht am wenigsten Zeit und ist am wenigsten chaotisch. Die Sitzordnungen können ab und zu geändert werden, damit es spannend bleibt. Achte auf einen Mangel an Enthusiasmus.
- Zufalls-Paarungen.** (Mittelschwer) Diese Technik erfordert etwas Zeit pro Klasse. Die Lehrkräfte haben z. B. die Namen ihrer Schüler auf Eisstiele geschrieben, die gemischt und paarweise herausgezogen werden.

Den größten Teil der Stunde verbringen wir in diesen Zweiergruppen. Ich gehe von Gruppe zu Gruppe und bin für die meisten so wenig hilfreich wie möglich, aber manchmal jammere ich auch mitfühlend darüber, wie schwierig das Rätsel ist. Ich bin auf der Suche nach Frustration, guten Ideen und Schülern, die bereit für die nächste

Herausforderung sind. Häufig halten wir Entdeckungen und Vermutungen an einer gemeinsamen Tafel fest.

Dan Finkel von MathForLove.com ist ein Mathepädagoge, den ich sehr schätze. Normalerweise schließt er den Unterricht ab, indem er die Klasse zum Nachdenken zusammenbringt und über ihre Entdeckungen spricht. Ich mache das nicht. In meinem Unterricht werden die Aufgaben am Ende nicht zusammengefasst. Gedanken werden unvollständig und ungelöst gelassen. Nicht weil ich faul bin, sondern weil - wenn die Klasse 85% Engagement erreicht - nichts, was ich sagen kann, für die Mehrheit der Schülerpaare relevant genug ist, um die Unterbrechung ihrer Gespräche und Gedanken zu rechtfertigen. Ich werde ein Paar von Kindern unterbrechen, aber selten die ganze Klasse. Wir machen weiter bis zum Schlusspfiiff!



Die ersten sieben Primzahlen {2,3,5,7,11,13,17} können in vier Tagen gelöst werden. Hier einige Beispiele:

3 → 8 → 4 → 2
8 → 3 → 4 → 2
8 → 7 → 3 → 2
11 → 4 → 2 → 1

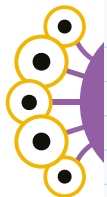
Die ersten elf Primzahlen {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31} können auf viele Arten in fünf Tagen gelöst werden. Hier sind ein paar Beispiele:

3 → 14 → 8 → 4 → 2
16 → 8 → 4 → 2 → 1
16 → 8 → 5 → 2 → 1
17 → 7 → 4 → 2 → 1
17 → 11 → 4 → 2 → 1

Es gibt keinen Weg, die obigen Gläser in weniger Tagen zu leeren, also nennen wir die aufgeführten Reihenfolgen "minimale Leerungsreihenfolgen".

Wenn wir die Reihenfolge auflisten, schreiben wir zuerst diejenigen auf, die kleinere führende Zahlen haben. Finde für die ersten n Primzahlen die erste aufgelistete minimale Leerungsreihenfolge. Ist die zuerst aufgeführte Reihenfolge immer die einzige? Welche Reihenfolge sind für eine eindeutige minimale Leerungsreihenfolge möglich? Kann zum Beispiel die letzte Zahl die größte sein?

Welche Reihenfolgen sind eine minimale Leerungsreihenfolge für mindestens eine Reihe von Gläsern? 1,2,3,4,9 braucht fünf Tage, um {1,3,6,10,19} zu leeren, aber 10,6,3,1 oder 6,3,10,1 können die gleiche Menge an Gläsern in nur vier Tagen leeren. 9,4,3,2,1 kann Gläser mit 1-19 Gurken in fünf Tagen leeren. Diese Reihenfolge ist mindestens so schnell wie jede andere Reihenfolge. 16,8,4,2,1 braucht ebenfalls fünf Tage.



Bei manchen Mengen von Gläsern wie {1,2,3,4,5,6,7} gibt es genau eine Möglichkeit, sie in der minimalen Anzahl von Tagen zu leeren. Welche anderen Mengen haben diese Eigenschaft?



Das ursprüngliche **Cookie Monster®-Problem** erschien 2002 in dem Buch *The Inquisitive Problem Solver* von Vaderlind, Guy und Larson. Richard Guy war mein Mentor, als er auf die Hundert zuging und diese Marke überschritt. Bis einen Monat vor seinem Tod mit 103 Jahren war er der älteste praktizierende Mathematiker der Welt.

Im ursprünglichen Problem musste das **Krümelmonster** eine Zahl n wählen und hatte dann die zusätzliche Wahl, aus welchen Gläsern es genau n Kekse nehmen wollte.

Bei der Version des Problems mit dem **gierigen Gurkenmonster** fällt die zweite Wahlmöglichkeit weg. Das Gurkenmonster folgt einem gierigen Algorithmus, d.h. nachdem es eine Zahl gewählt hat, nimmt es sich immer genau diese Anzahl von **Gurken** aus allen möglichen Gläsern.

Anders als das Original erlaubt uns das gierige Monster, die Arbeitsweise einer Leerungsreihenfolge wie 6,3,2 auf einer Menge von Gläsern eindeutig zu definieren.



Richard Guy Guy malte das Leben auf eine große Leinwand. In Singapur war er ein begeisterter Segler, in Kanada ein begeisterter Bergsteiger und der kanadische Alpenverein benannte eine Gletscherhütte nach ihm und seiner Frau Louise. Er ging noch mit 103 Jahren zur Arbeit. Louise war zehn Jahre zuvor gestorben, aber auf einer Seite seines Computerbildschirms war immer ein Bild von ihr zu sehen. Sein Buch *Unsolved Problems in Number Theory* ist das beste Buch, das je geschrieben wurde. 😊

QUADRAT-ELIQÜEN

Quadrate aus der gleichen Klasse hängen zusammen auf dem Schulhof herum. Die 1x1-Quadrate sind aus Klasse 1. Sie werden alle verbunden sein. Die 2x2 Quadrate sind aus der Klasse 2. Sie werden auch miteinander verbunden sein. Das gilt für alle Klassenstufen.

Zusammen füllen alle Quadrate den Spielplatz aus.

Die Schulleiterin ist fair. Sie verlangt, dass diese Quadrat-Cliquen alle die gleiche Größe haben - oder so nah an der gleichen Größe wie möglich.

Wenn sie zum Beispiel vier Größen von Quadraten auf einen 10x10 Spielplatz verteilt, könnte der Spielplatz so aussehen wie der Spielplatz auf der rechten Seite.

Leider ist das nicht so toll. Die Umfänge der größten und der kleinsten Clique sind sehr unterschiedlich.

Auf den Seiten 316 und 319 feiere ich einige meiner Misserfolge bei dem Versuch, den 10x10-Spielplatz mit drei Cliquen zu lösen. Es ist einfach, sich in Misserfolge zu verlieben, wenn sie so schön sind wie diese ;-)

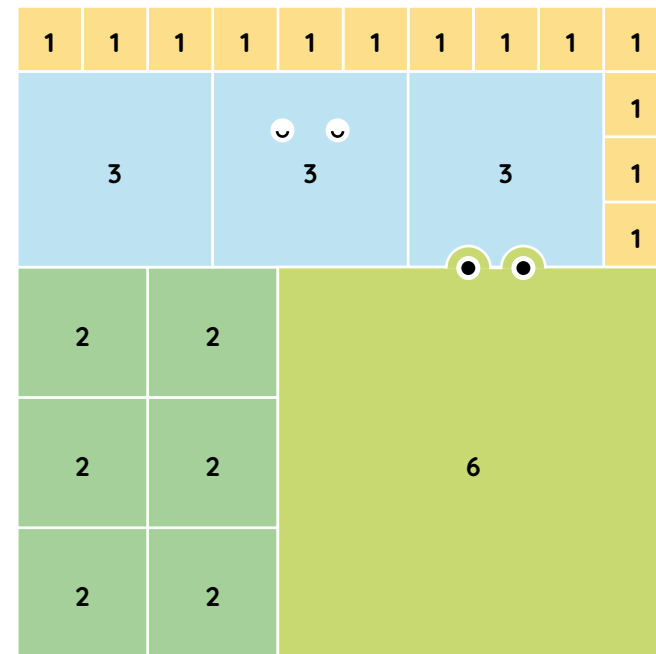
Feiere Misserfolge bei jeder Gelegenheit.

Du wirst mit Schülern belohnt, die keine Angst davor haben, falsch zu liegen. Der Mathematikunterricht wird vor lauter Konversation nur so sprühen.



- Die 1x1-Quadrate: Umfang 28.
- Die 2x2 Quadrate: Umfang 20.
- Die 3x3 Quadrate: Umfang 24.
- Das 6x6 Quadrat: Umfang 24.

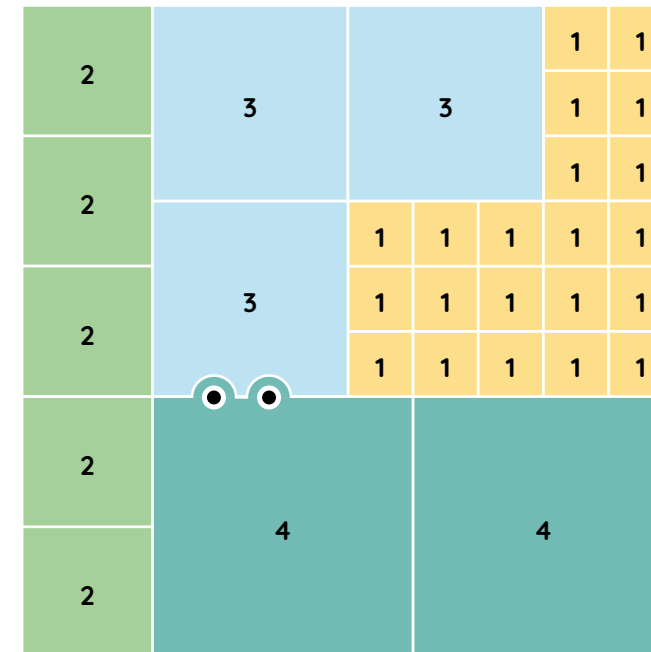
Der größte Unterschied zwischen den Umfängen ist 8. **Das ist zu viel.** Suche auf diesem 10x10 Spielplatz vier Quadrat-Cliquen, bei denen der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Umfang so klein wie möglich ist.



Das ist das Beste, was ich finden konnte.

Der größte Unterschied bei den Umfängen ist zwei:

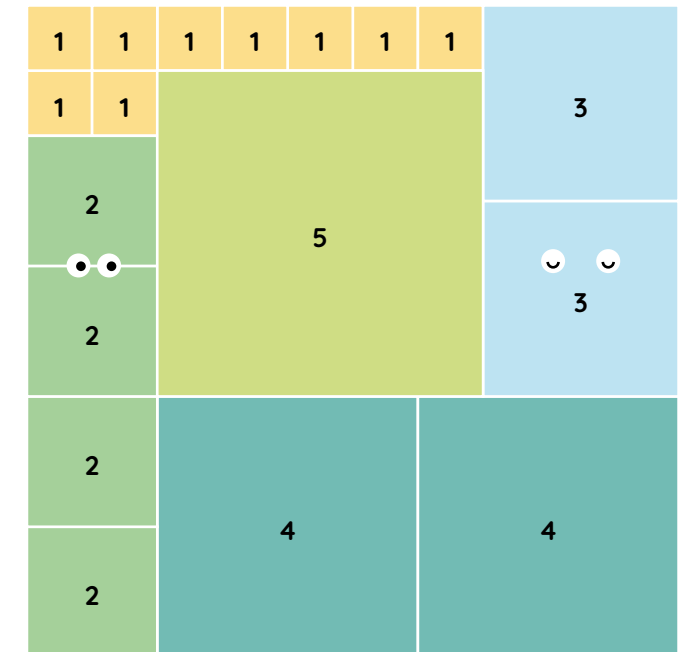
- Die 1x1-Quadrate: Umfang 22
- Die 2x2 Quadrate: Umfang 24
- Die 3x3 Quadrate: Umfang 24
- Das 4x4 Quadrat: Umfang 24



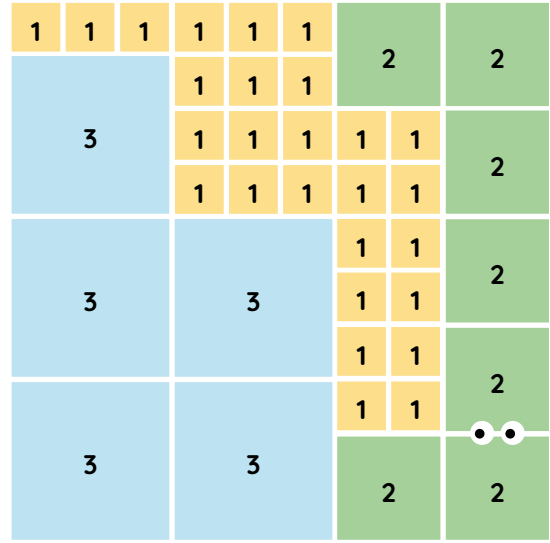
Umfangslängen 22/24/24/24 in der Reihenfolge, beginnend mit der 1x1-Region.

Ich glaube nicht, dass vier Cliquen alle den gleichen Umfang haben können. Für fünf Cliquen ist der kleinste Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Umfang in meiner besten Lösung (unten) sechs. Finde eine Lösung mit drei Cliquen auf einem 10x10 Spielfeld, so dass der Unterschied zwischen den Umfängen null oder so klein wie möglich ist.

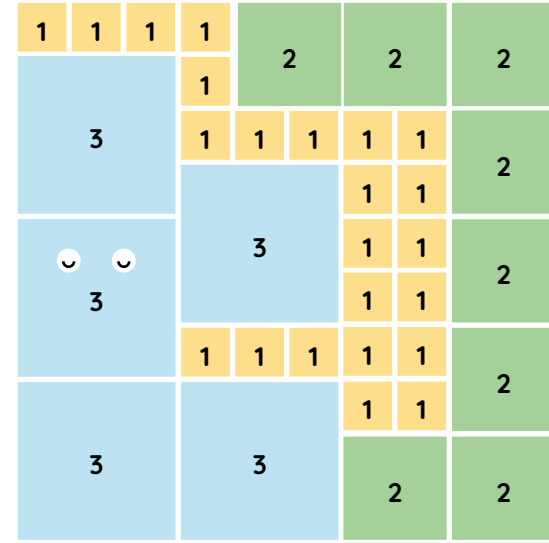
SPOILERALARM!



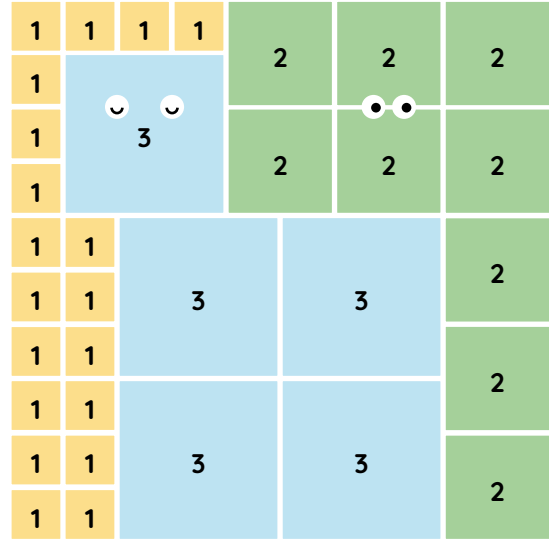
18/20/18/24/20



32/32/30



32/32/30

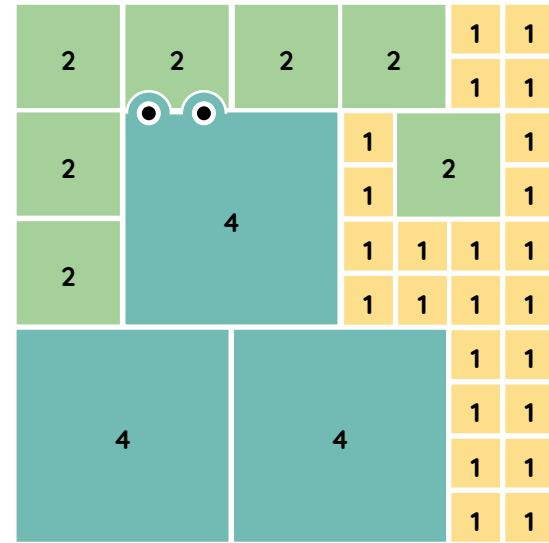


30/32/32

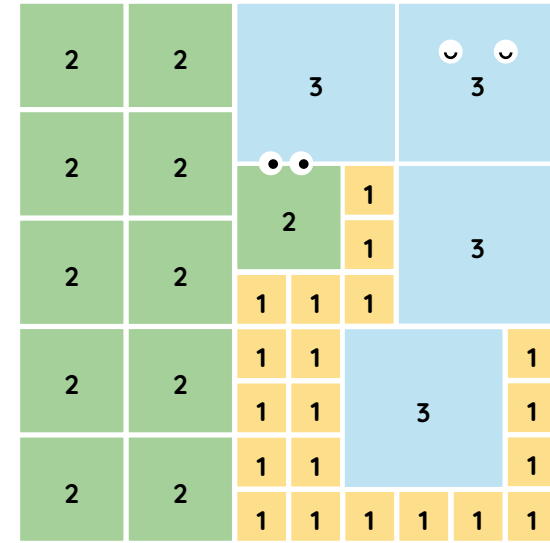
Auf einem 10x10 Spielplatz habe ich immer wieder Lösungen gefunden, bei denen sich der größte und der kleinste Umfang um zwei unterscheiden. **Das sind alles Fehler - es ist möglich, eine Lösung zu finden, bei der alle Umfänge identisch sind.**

Das ist auch für drei Cliques auf einem 8x8 und 9x9 Spielplatz möglich. Los geht's. 😊

SPOILERALARM!



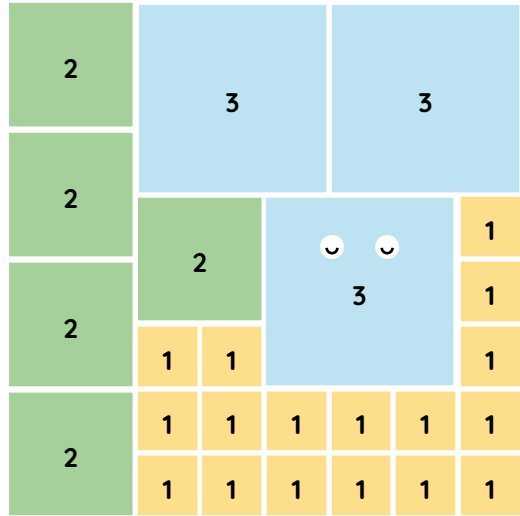
34/34/32



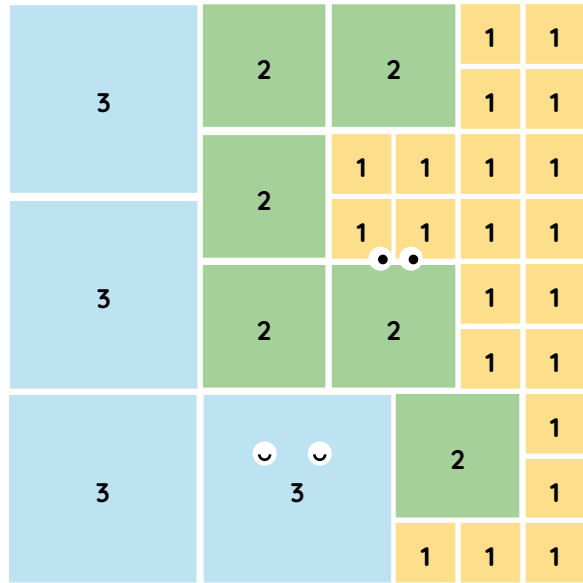
34/32/32

Wenn die Umfänge alle gleich groß sind, wie viele quadratische Cliques können dann auf einem $n \times n$ -Spielplatz spielen? **Ich weiß es nicht.**

Die Anzahl der Cliques, die auf einem ausreichend großen Spielplatz spielen können, ist nicht begrenzt. Ein quadratischer Spielplatz der Größe $n \times n$ kann zum Beispiel mit n identischen rechteckigen Regionen der Größe $n^{(n-1)}$ mal n bedeckt



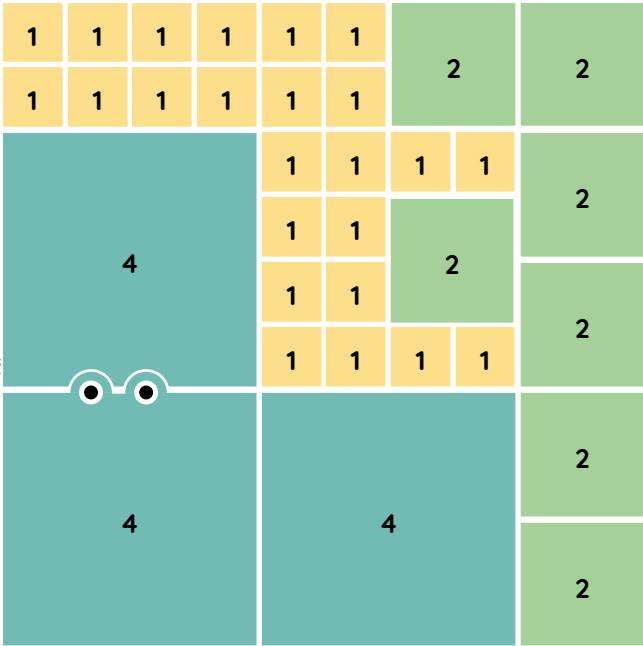
24/24/24



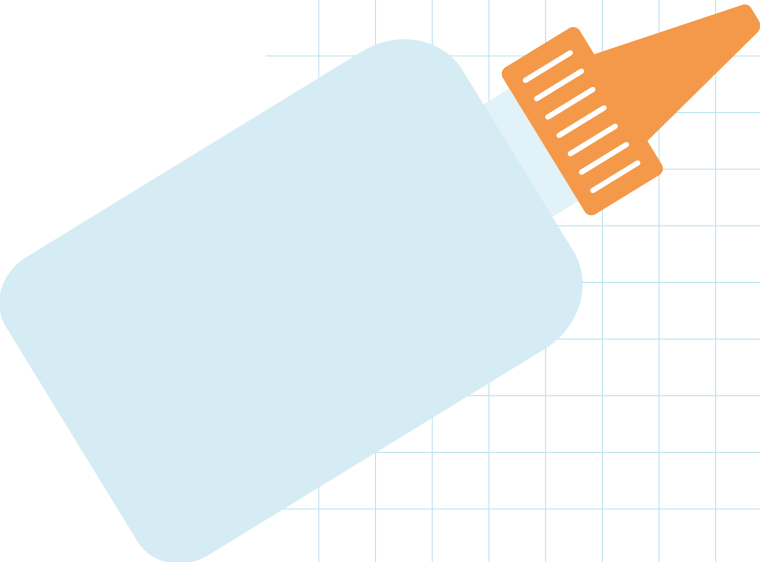
30/30/30

Das sind Lösungen für die Spielplätze 8x8, 9x9 und 10x10. Alle drei Umfänge sind auf jedem Spielplatz gleich groß. Mit Sicherheit gibt es noch viele andere Lösungen.

Diese Ergebnisse gehören zu den schönsten des ganzen Buches. Ich möchte Rätsel erstellen, die schön sind, und es gibt nichts Schöneres als diese. **Wenn du deine eigenen Lösungen findest, teile sie mit uns.** 😊



32/32/32



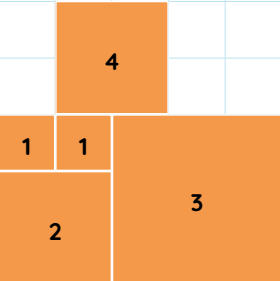
KLEBER

Füge zwei Quadrate mit der Bezeichnung "1" zu einem Gitter hinzu.

Bei jedem Zug klebst du weitere Quadrate auf die bereits vorhandenen - beginnend mit einem Quadrat mit der Bezeichnung "2", dann eines mit der Bezeichnung "3", dann eines mit der Bezeichnung "4", usw.

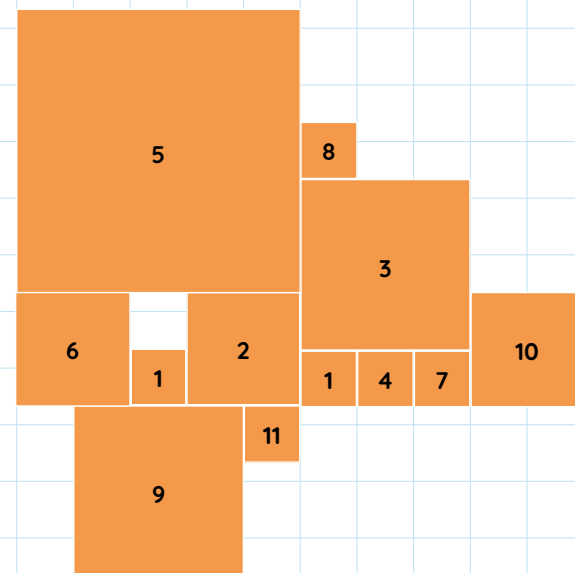
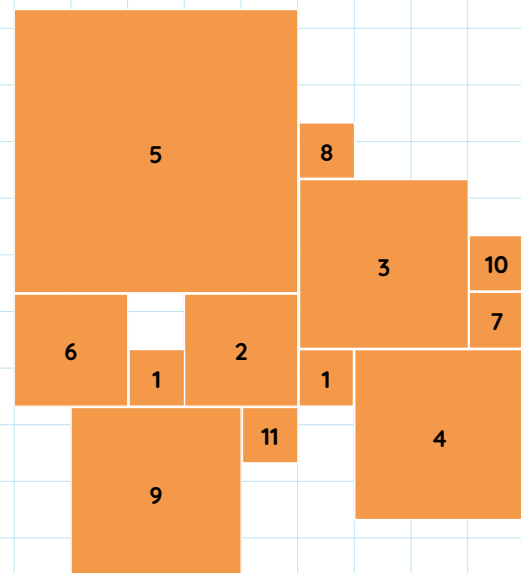
Alle Quadrate müssen mit ihren Kanten auf dem Raster liegen.

Die Länge der Kante eines Quadrats darf nicht größer sein als die Bezeichnung des Quadrats. Sie darf aber kleiner sein.



Wenn ein Quadrat aufgeklebt wird, muss seine Beschriftung der Summe der Beschriftungen aller Quadrate entsprechen, die eine Kante teilen. Beispiel: Wir haben gerade das Quadrat mit der Bezeichnung 4 aufgeklebt. Es teilt sich eine Kante mit einem Quadrat mit der Bezeichnung 1 und 3. $4=1+3$. Gut!

Wie viel kannst du schaffen?



Auf der linken Seite ist mein erster Versuch. Ich habe es nicht geschafft, höher als 11 zu kommen. Du kannst sehen, dass es keinen Platz gibt, um das "12"-Quadrat zu kleben.

Daneben ist mein zweiter Versuch zu sehen. Ich habe eine kleine Änderung vorgenommen, indem ich die "4" verkleinert habe, aber mit dieser kleinen Änderung habe ich es bis 17 geschafft. Meine Lösung siehst du auf der nächsten Seite.

Wie immer ist es nicht nötig, Zeit damit zu verschwenden, das Problem zu erklären, indem du die Regeln erläuterst. **Das ist langweilig!**

Fordere stattdessen einen bestimmten Schüler auf, zwei Quadrate mit der Bezeichnung "1" zu kleben, und bitte dann das nächste Kind, ein Quadrat mit der Bezeichnung "2" zu kleben. Wenn sie es nicht richtig geklebt haben, sagst du einfach, dass sie gescheitert sind, und erklärst die Regel, die sie zum Scheitern gebracht hat. Dann fragst du das nächste Kind. Wenn es auf diese Weise scheitert, ist das immer lustig, denn es kennt die Regeln nicht, also scheitert es natürlich. 😊

Fahre fort, bis ein Kind nicht mehr antworten kann, weil es unmöglich ist. Es ist wichtig, dass du trotzdem die Frage stellst und einen klaren Kopf bewahrst, auch wenn es unmöglich ist. Du kannst so tun, als wüsstest du nichts und sogar ein anderes Kind bitten, dem ersten Kind bei der Lösung zu helfen - indem du mit deinem Tonfall andeutest, dass es möglich ist. Dadurch durchbrichst du die Abhängigkeit des Kindes von dir.

Oft reagieren Kinder auf der Grundlage sozialer Anhaltspunkte auf dich, anstatt nachzudenken: Untergrabe die Genauigkeit von sozialen Hinweisen. Wenn eine Klasse besonders gut darin ist, sozialen Hinweisen zu folgen, führe ich sie absichtlich mit Hinweisen im Gesicht und in der Stimme in die Irre und blöke sie dann an wie ein Schaf. **Bahahaha!**



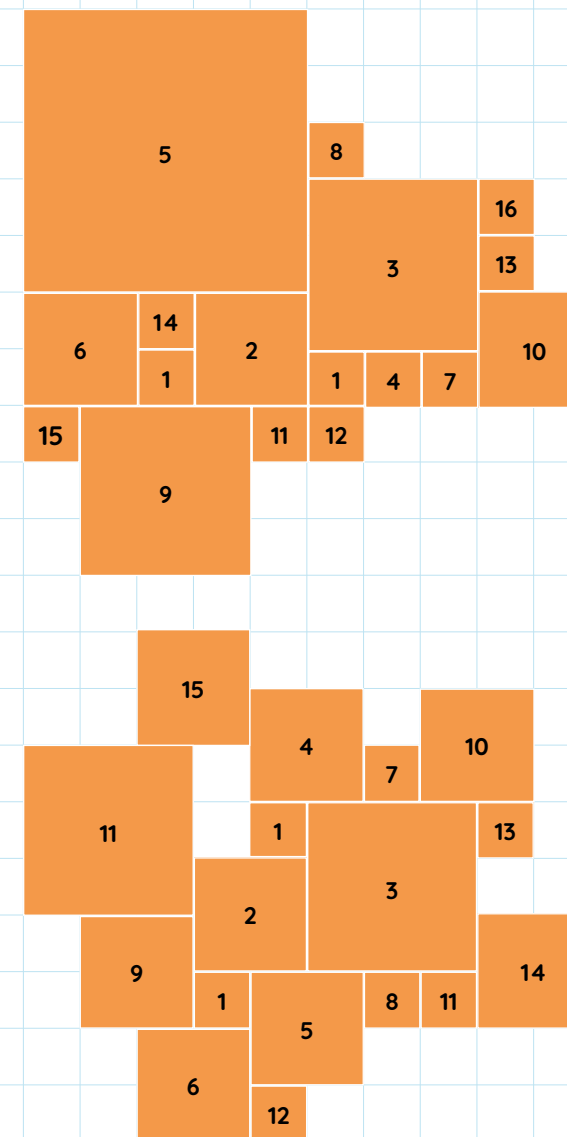
Auf der letzten Seite haben wir gesehen, wie du am besten mit der Erklärung eines Rätsels beginnst - lass die Schüler einfach gleich loslegen, bevor sie die Regeln kennen. Eine weitere Möglichkeit ist, dass du dein eigenes Beispiel konstruierst. Welches dieser beiden Beispiele ist besser? Es gibt eine richtige Antwort. **Warte ab und denke nach.** 😊

Der obere Versuch war mein zweiter Versuch, das Rätsel zu lösen. Ich bin bis 17 gekommen. Deine Klasse kann vielleicht besser sein, aber das ist nicht garantiert. Das ist der erste Hinweis darauf, dass das Beispiel oben nicht das beste Beispiel ist, um das Problem zu erklären. Aus Motivationsgründen möchtest du, dass durchschnittliche Kinder dein Beispiel schon bei den ersten Versuchen schlagen können.

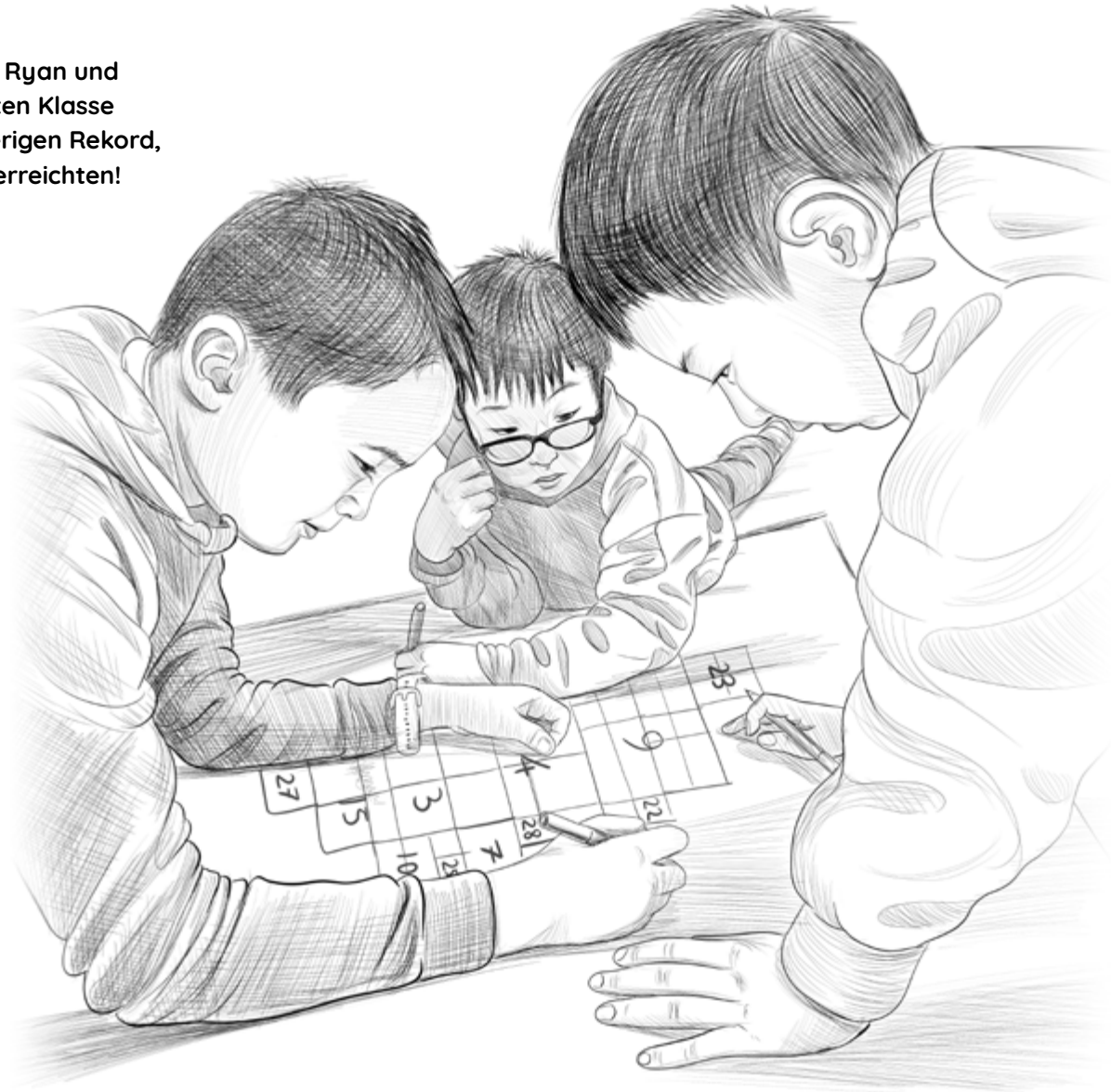


Zweitens ist das Rätsel unten die richtige Antwort, weil es Fehler enthält. Diese können von den Schülern entdeckt werden, um die Regeln des Rätsels zu festigen. Regeln müssen immer wiederholt werden - das ist eine gute Gelegenheit, dies zu tun. Lass deine Schüler den Fehler finden, bei dem du zwei Zahlen anstelle von nur einer gesetzt hast (Tipp: die 11). Bring deine Schüler dazu, einen Additionsfehler zu finden (Tipp: $5+6 = 12$?).

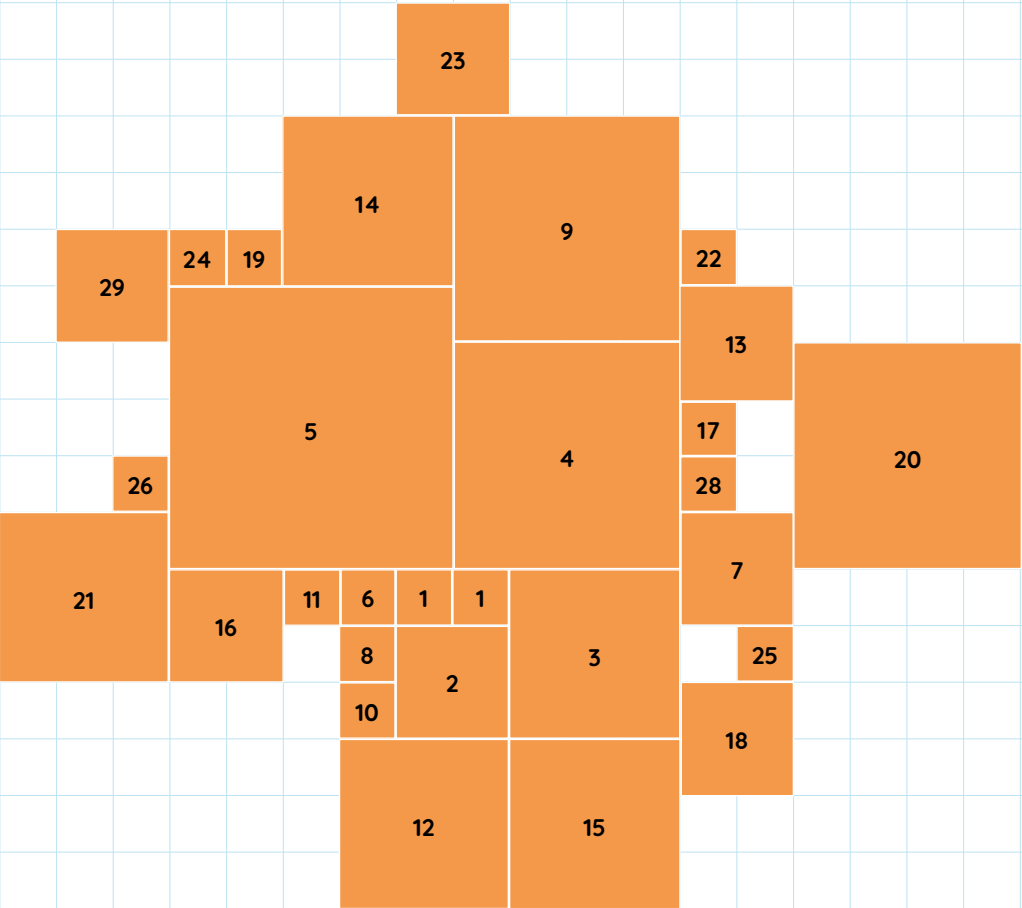
Auch der dritte Grund, warum das Rätsel unten die richtige Antwort ist, hat mit den Fehlern zu tun. Eine "Lösung" mit Fehlern zu präsentieren, hilft, das Stigma des Scheiterns aus deinem Klassenzimmer zu entfernen. Die Aufgabe auf der rechten Seite ist ein Fehler. Das ist nicht schlimm. Wir können es noch einmal versuchen. Das ist eine gute Überleitung dazu, dass du deine **Schüler zu zweit arbeiten und sie versuchen lässt, es besser zu machen als du.** 😊



Die Schüler Nicholas, Ryan und Nathan aus der fünften Klasse übertrafen den bisherigen Rekord, indem sie 29 Punkte erreichten!



Ich habe Kleber zuerst einer Gruppe von zwanzig Pädagogen und Mathematikern vorgestellt. Nachdem wir zwei Stunden lang an dem Rätsel gearbeitet hatten, war das beste Ergebnis, das wir fanden, 26. Ich war begeistert, als acht Monate später eine Gruppe von drei Schülern der fünften Klasse diese Lösung mit einem Höchstwert von 29 fand!



Die beste Lösung hat jetzt der dreizehnjährige Tylan aus Innisfail, Alberta, Kanada. Anstatt die Lösung zu zeigen, überlasse ich es dir, sie anhand der folgenden Hinweise zu rekonstruieren!

2=1+1	8=2+6	14=5+9	20=8+12	26=10+16	32=5+6+8+13
3=1+2	9=4+5	15=4+11	21=8+13	27=10+17	33=9+24
4=1+3	10=3+7	16=7+9	22=10+12	28=9+19	34=12+22
5=1+4	11=4+7	17=7+10	23=7+16	29=5+24	
6=1+5	12=2+10	18=5+13	24=5+19	30=7+23	
7=3+4	13=5+8	19=5+14	25=9+16	31=13+18	

Dies ist noch keine Unendliche Gurke. Es ist ein einziges Rätsel. Und das ist mit Risiken verbunden. Vor der Klasse fragte ein Junge aus der 5. Klasse: "Was ist die beste Antwort bis jetzt?"

Meine erste Reaktion war, die Antwort zu verweigern, weil das beste Ergebnis so gut ist, dass von keinem Schüler erwartet werden kann, dass er in einer einzigen Stunde auch nur halb so gut wird. Das wäre demotivierend.

Als zweites wollte ich lügen und die Antwort 15 sagen, was gut ist, aber vielleicht nicht zu gut. Ich habe mich darauf eingelassen, aber die Lüge reichte nicht aus, um das Rätsel pädagogisch wertvoll zu machen. Das wurde gegen Ende der Stunde deutlich, als einige Schülergruppen nicht annähernd an die 15 herankamen ... und andere Schülergruppen diese Zahl übertroffen hatten.

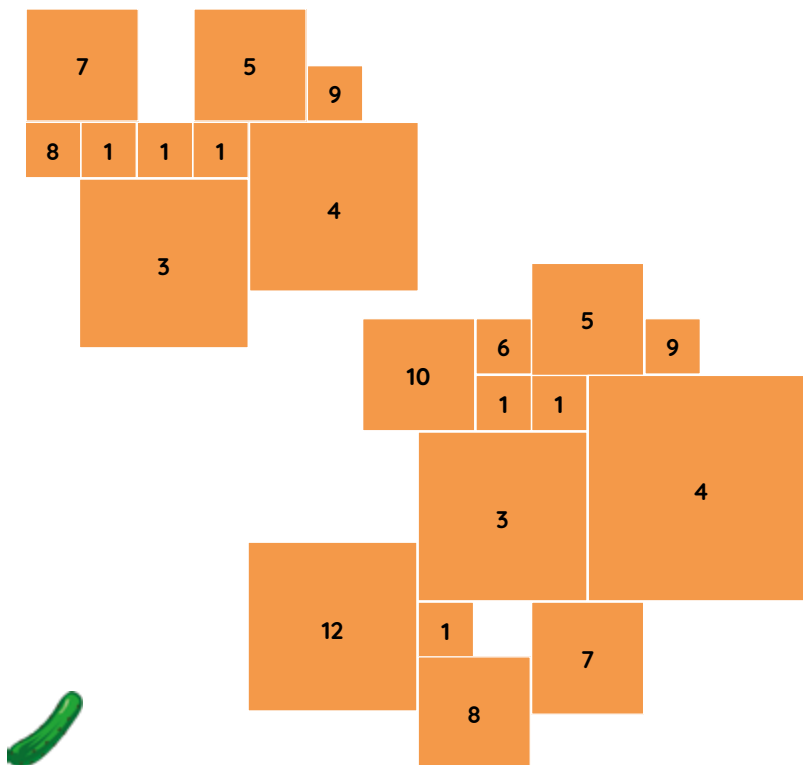
Bemühte Schüler bekamen es unter die Nase gerieben.



Wir können Kleber zu einer Unendlichen Gurke machen. Anstatt immer mit zwei 1x1-Quadraten zu beginnen, können wir etwas Allgemeineres ausprobieren.

- Wähle eine ganze Zahl n , die 2 oder mehr ist.
- Klebe n 1x1 Quadrate auf das Gitter. Beschrifte jedes von ihnen mit einer 1.
- Klebe ein Quadrat mit der Beschriftung n , dann $n+1$, dann $n+2$ usw. (Alle vorherigen Regeln gelten.)
- Versuche, so hoch wie möglich zu kommen.

Hier sind mein erster und zweiter Versuch für $n=3$. Beachte, dass wir kein Quadrat mit der Beschriftung "2" benutzen.



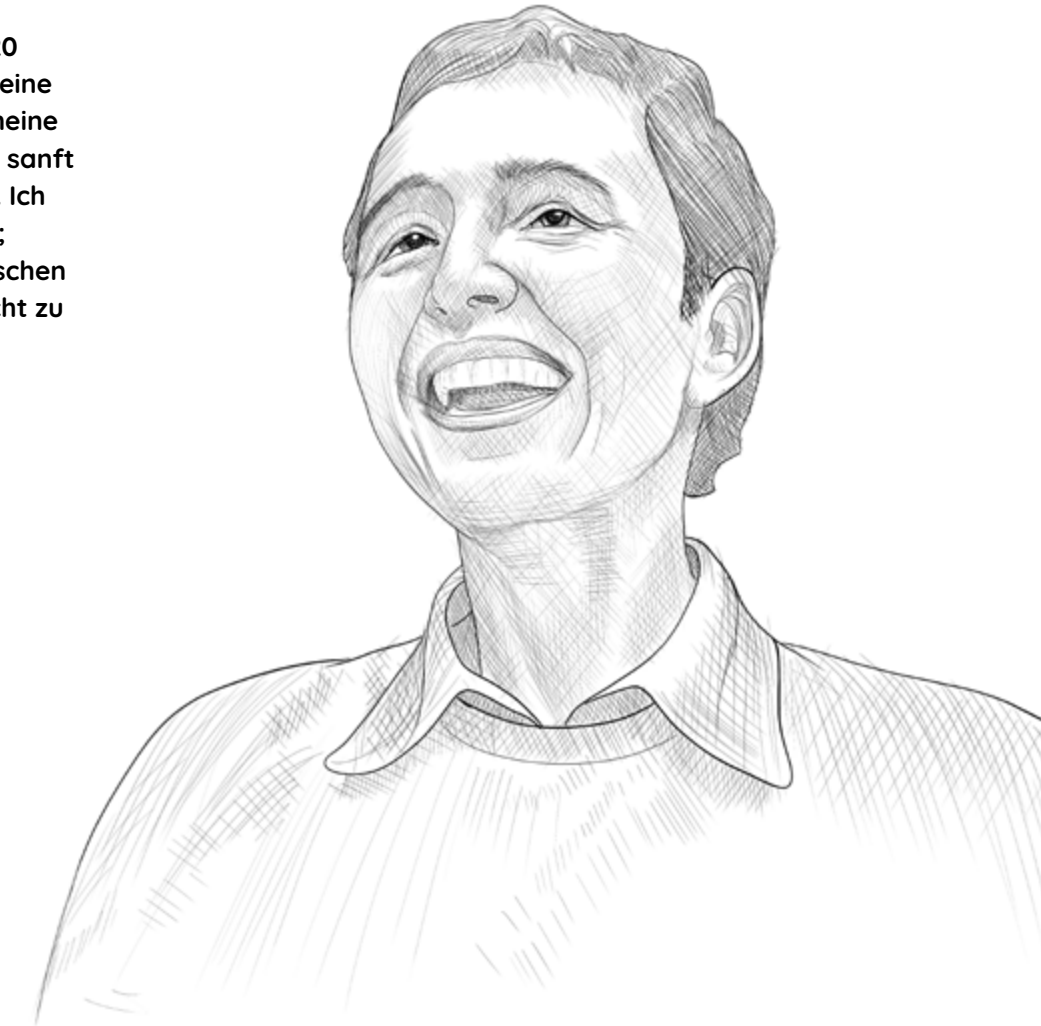
Ich spiele das Kleber-Puzzle schon seit einigen Wochen, 10-20 Minuten am Stück, allein oder mit meinem Mann. Kleber ist eine entspannende Aktivität, die einfach Spaß macht. Es lenkt meine Versuche, es in eine harte Herausforderung zu verwandeln, sanft um und bringt mich zurück zum entspannten Mathekritzeln. Ich habe meine anfänglichen Vermutungen als falsch erwiesen; meine ersten Versuche, das Ganze mit anderen mathematischen Methoden zu lösen, sind gescheitert. Mir macht es Spaß, nicht zu wissen, wohin das Ganze führt.

Maria Droujkova ist Mutter, Lehrplanentwicklerin und Beraterin für Mathematikunterricht. Sie wurde auf der Krim geboren und lebt jetzt an der Ostküste der USA.

Kinder der 2. Klasse können zwar mit dieser Mathematik spielen, haben aber in der Regel nicht die Fähigkeit, sie schön zu schreiben. Eine Option ist es, diese Aufgabe eine Woche lang in jeder Mathematikstunde vor der ganzen Klasse zu lösen (9 Minuten). Halte jeden Tag eine neue Lösung auf, so dass du am Ende der Woche fünf Versuche zum Vergleichen hast.



Dieses Problem ist so tiefgründig, dass du es einen Monat lang behandeln könntest und jede Sekunde wäre gut investierte Zeit.

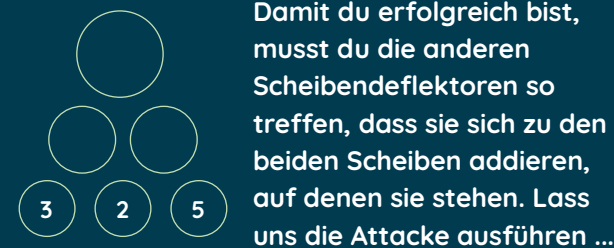


ERD-ATTACKE

Verhindere, dass die feindlichen Raumschiffe alle Gurken der Erde klauen! Um ein Raumschiff abzuschießen, müssen alle seine Scheibendeflektoren zerstört werden. Du zerstörst sie, indem du sie mit deiner Ionenkanone bei einer nicht-negativen Anzahl von Sekunden triffst.



In diesem Fall hast du deine Ionenkanone bei 2, 3 und 5 Sekunden abgefeuert und damit das Heck des angreifenden Raumschiffs getroffen. Statt das Raumschiff zu zeichnen, lass uns einfach die Scheibenabweiser zeichnen:



Die 7 sieht gut aus, denn $2+5=7$. Leider haben wir auf der Erde nur eine Ionenkanone und bei 5 Sekunden versuchst du, auf zwei verschiedene Scheiben zu schießen! Das ist gar nicht gut. Das Raumschiff schafft es und alle Gurken der Erde werden gestohlen.



Das ist viel besser. Alle Summen funktionieren ($3+2=5$ und $2+6=8$ und $5+8=13$) und es gibt keine Dopplungen. Es ist dir gelungen, das angreifende Raumschiff in 13 Sekunden zu zerstören. Den Amerikanern, Asiaten und Australiern wurden alle Gurken gestohlen, aber der Rest der Menschheit hat ihre noch. 13 Sekunden waren zu lang, um die meisten Gurken des Planeten zu retten, aber du wirst trotzdem als Held gefeiert! Herzlichen Glückwunsch!

Vielleicht kannst du das angreifende Raumschiff ein bisschen schneller zerstören?

SPOILERALARM!

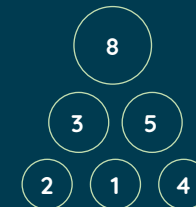
The children must know that this is tongue-in-cheek humour. If this is not your style, rework the story so that you are guiding these starships to land and deliver much needed aid.



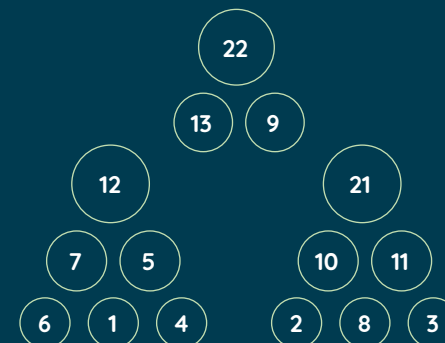
Blurring success and failure is a fun part of this narrative. You congratulate them on a job well done, but of course it would have been better if they could have saved the other half of Earth's pickles.



Der schnellste Weg, ein einzelnes dieser Raumschiffe zu zerstören, beträgt 8 Sekunden.

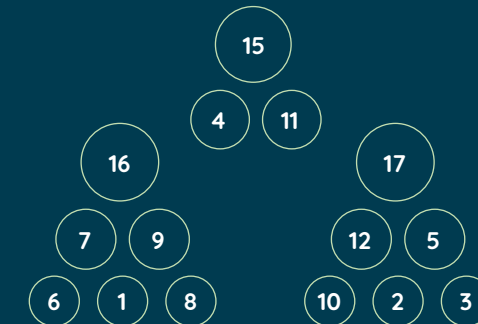


Wie kannst du diese drei Schiffe am schnellsten zerstören? Auch hier gilt, dass du keine doppelten Zeiten haben darfst und deine größte Zeit so klein wie möglich sein sollte.



22 Sekunden sind großartig. Europa und Amerika wurden all ihre Gurken gestohlen, aber der Rest der Welt wurde gerettet! Herzlichen Glückwunsch!

Die bestmögliche Punktzahl für jedes dieser Rätsel zu finden, ist nicht einfach. Ich versuche, besser als 22 Sekunden zu sein:



Es würde mich überraschen, wenn 17 Sekunden nicht das Bestmögliche sind, aber es ist möglich, dass ich etwas übersehen habe. Außerdem glaube ich, dass 29 die bestmögliche Punktzahl für diese vier Raumschiffe ist.

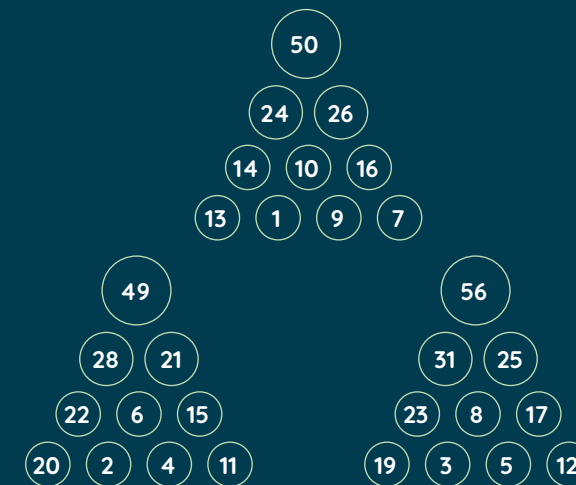


Falls die Schüler fragen - sie können die Null benutzen, wenn sie wollen. Sie werden aber schnell feststellen, dass die Null überhaupt nicht hilft. Das sollen sie selbst herausfinden. Die Regeln erlauben es, die Null zu benutzen.



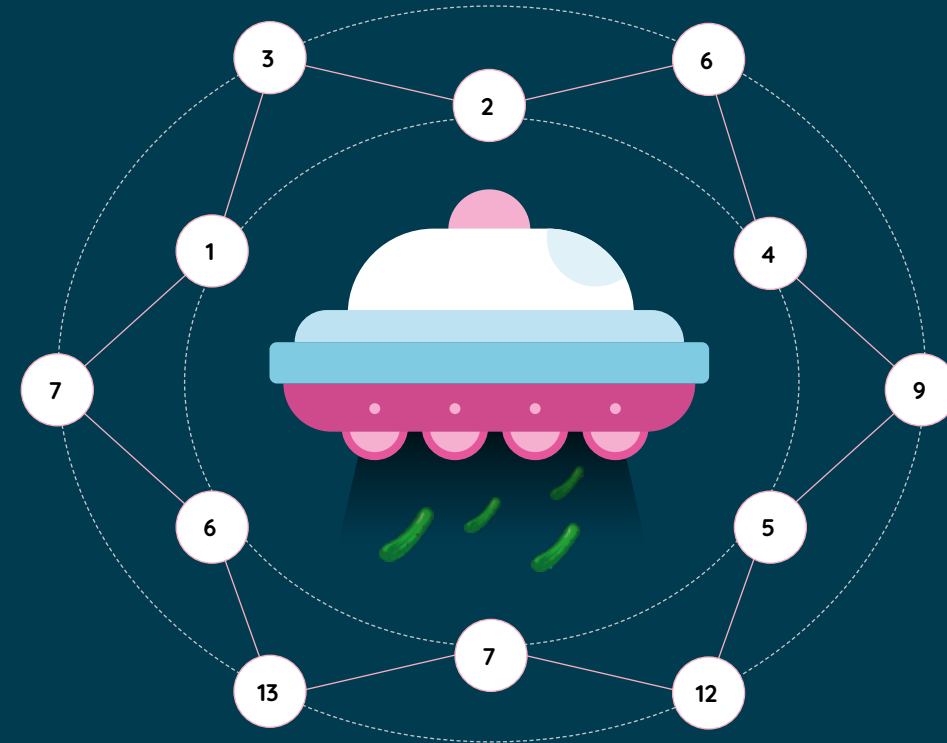
Es ist nie verkehrt, ein bisschen Geografie in den Matheunterricht einzubringen. Je mehr Abwechslung, desto besser.

Die beste Zeit, die ich für diese 10-Scheiben-Raumschiffe gefunden zu haben glaubte, war 56 Sekunden, aber ich habe mich geirrt. Finde es heraus! Ed Pegg Jr. hat mir erzählt, dass er die drei in 53 Sekunden abgeschossen hat.



HOVER POD-ANGRIFF

Hover Pods haben einen inneren und einen äußeren Ring aus Scheiben. Der äußere Ring wird durch die Addition der beiden nächstgelegenen Scheiben des inneren Rings gebildet.



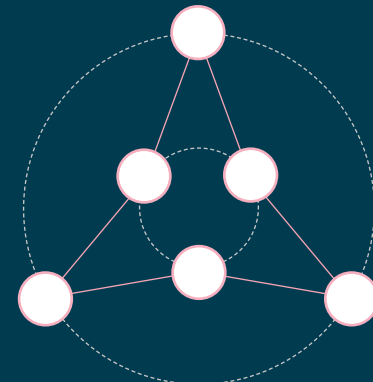
Das Beispiel scheitert daran, dass die Ionenkanone sowohl bei 6 als auch bei 7 Sekunden nicht weiß, wohin sie zielen soll.

Es gibt Raum für Kreativität. In welchen Anordnungen fliegen die Raumschiffe? Wie sieht eine feindliche Schwebekapsel aus? Zögernde Schüler können zur Problemlösung gebracht werden, indem sie ihre Designs feiern.

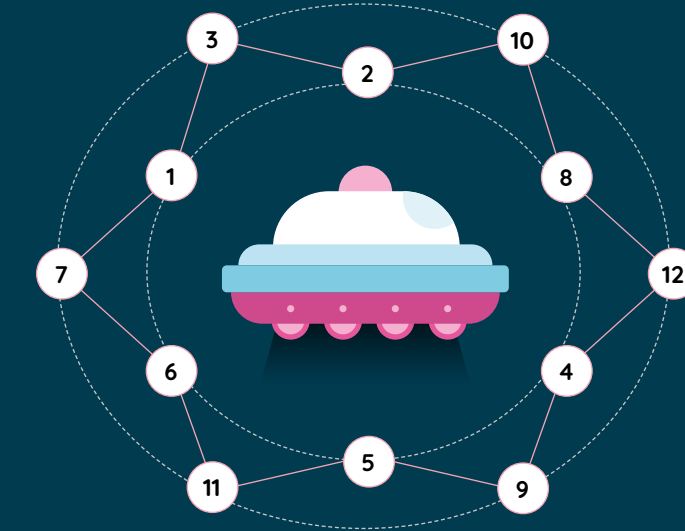
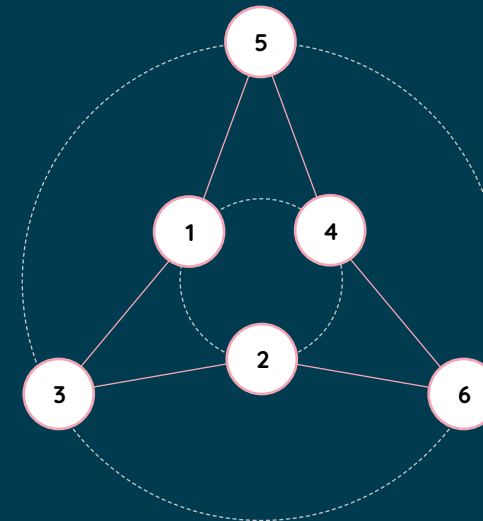


Zerstöre verschiedene Größen von Hover Pods mit den Zahlen 1-6 (unten), 1-8, 1-10 und 1-12 (oben).

SPOILERALARM!



Die Zahlen 1-6 können diesen Hover Pod mit diesem dreieckigen Muster zerstören. Die Zahlen 1-12 können den Hover Pod auf der rechten Seite mit diesem sechseckigen Muster zerstören. Die Zahlen 1-10 können jedoch einen Hover Pod mit einem fünfeckigen Sternmuster nicht zerstören.



Warum? Weil die Summe der Zahlen auf der äußeren Scheibe doppelt so groß sein muss wie die Summe der Zahlen auf den inneren Scheiben. (Bestätige, dass das stimmt, bevor du fortfährst. Der Grund dafür ist, dass jede Zahl auf den inneren Scheiben bei der Erstellung der äußeren Scheiben doppelt zählt.) Das bedeutet, dass die Summe aller Zahlen ein Vielfaches von 3 sein muss. Die Summe der ganzen Zahlen 1-10 ist 55, was kein Vielfaches von 3 ist.

Experimentiere mit Themen, die ein wenig ausgefallen sind... wie dieses Rätsel und ein späteres Rätsel, bei dem Frösche in blubbernde Kessel geworfen werden. Schüler (besonders die Hälfte, die zu viel Testosteron hat) werden oft in die Dramatik einer Geschichte hineingezogen, die ein bisschen böse ist.



LANGWEILIGE GESPRÄCHE

Meeples wiederholen sich die ganze Zeit und das kann langweilig werden. Sie sind schon ziemlich weit gekommen. **Sie weigern sich jetzt, zweimal neben demselben Meeple zu laufen.**

Zzz



Die vier Meeple oben stellen sich zum Beispiel für einen Film auf. Können sie sich für die Fortsetzung alle aufstellen, ohne dass zwei zweimal nebeneinander stehen?



FILM



FORTSETZUNG

Die Anordnung für die Fortsetzung funktioniert nicht, denn obwohl **rot** und **türkis** glücklich sind, führen die **gelben** und **blauen** Meeples die gleiche langweilige Unterhaltung miteinander wie im Film.

SPOILERALARM!

Hier ist eine Lösung. Die Meeples können sich für den Film und die Fortsetzung glücklich aufstellen, ohne zweimal das gleiche Gespräch zu führen.



FILM



FORTSETZUNG

Im Gegensatz zu menschlichen Populationen ist das Klonen sowohl legal als auch alltäglich. Meeples der gleichen Farbe unterhalten sich gerne miteinander... aber nur einmal. Meeples verschiedener Farben unterhalten sich gerne miteinander... aber nur einmal.

Acht Meeple stellen sich für einen Film auf und eine Woche später für die Fortsetzung. Versuche, sie so aufzustellen, dass kein Meeple in beiden Aufstellungen mit der gleichen Meeple-Farbe spricht. Hier sind die **blauen** und **türkisen** Meeple glücklich, aber die **roten** und **gelben** Meeple reden in beiden Wochen miteinander.

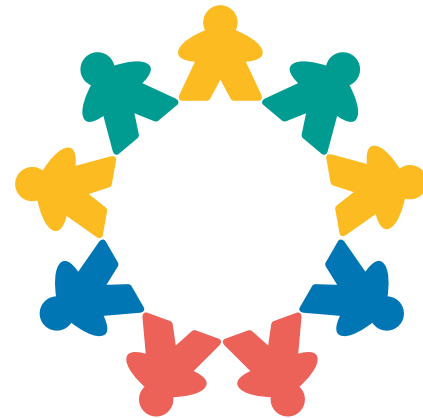
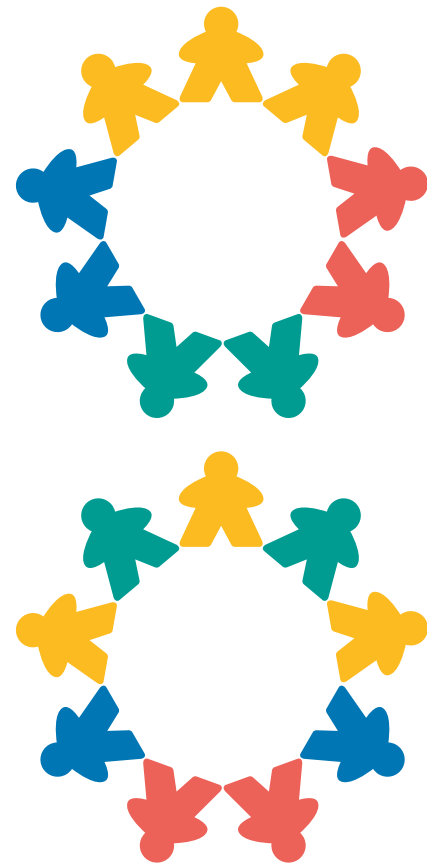
Hier ist eine Lösung. Das bedeutet, dass **(3,2,2,1)** möglich ist. Natürlich sind nicht alle Kombinationen möglich. Zum Beispiel ist **(4,2,1,1)** unmöglich.



Kannst du einen Weg finden, dass sich (3,2,2,2) Meeples zweimal im Kreis treffen? Die beiden folgenden funktionieren nicht, weil:

- die roten Klone sprechen in beiden Kreisen miteinander.
- die gelben und blauen Klone sprechen in beiden Kreisen miteinander.

SPOILERALARM!



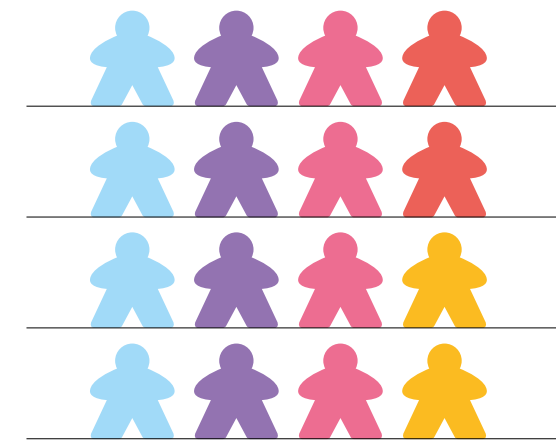
Oben sind (3,2,2,2) Meeples, die sich zweimal in einem Kreis treffen.

- Welche Gruppen sind für einen Kreis mit 8 Meeplen möglich?
- Ein Kreis mit 10 Meeplen?
- Andere Kreise?

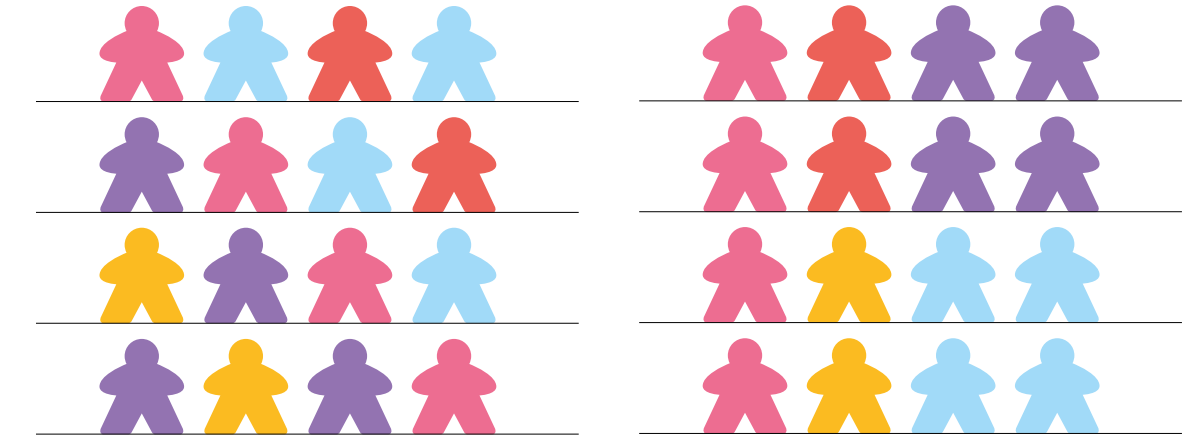
Ein quadratisches Klassenzimmer mit sechzehn Meeple-Schülern (4,4,4,2,2) will sich zweimal treffen. Jeder Meeple spricht mit den Meeples links, rechts, oben und unten, aber nicht diagonal. Findest du einen Weg, wie sie sich zweimal treffen können? Die folgende Anordnung der Schüler ist kein guter Anfang. 😊

Wie viele Meeples können sich am wenigsten dreimal in einem Kreis treffen? **Du wirst definitiv mehr als fünf Farben brauchen.**

SPOILERALARM!



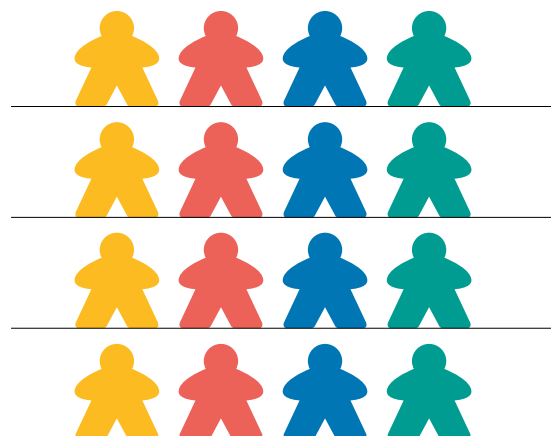
Das Klassenzimmer der Meeple-Schüler (4,4,4,2,2) kann sich so zweimal treffen. Vielleicht gibt es noch andere Möglichkeiten, aber ich glaube, sie sehen alle ähnlich aus wie diese.



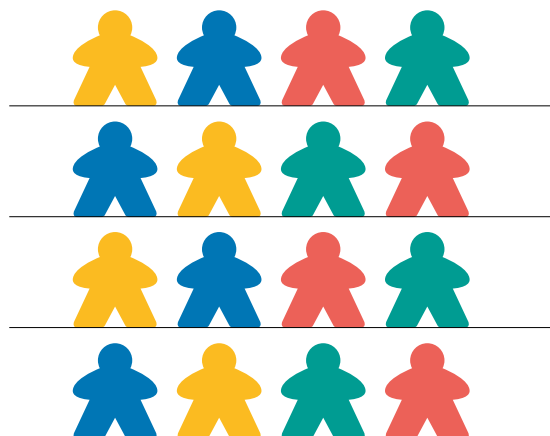
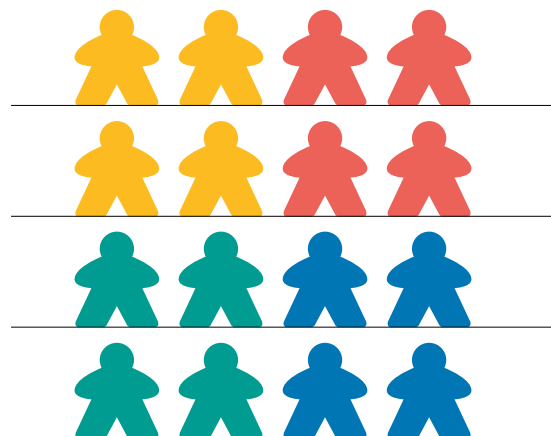
Sieben Meeples können dreimal in einem Kreis zusammenkommen. Weniger als sieben können wir nicht zusammenbringen, weil jeder Meeple jedes Mal mit zwei anderen Meeples sprechen muss.

In welchen Kombinationen können sich Meeples bei verschiedenen Kreisgrößen dreimal treffen? Viermal? Etc. Was ist mit anderen Formen?





Ein quadratisches Klassenzimmer mit sechzehn Meeple-Schülern (4,4,4,4) will sich zweimal treffen. Findest du einen Weg, dass sie sich zweimal treffen können?



Das scheint unmöglich zu sein. Hier sind einige meiner schönen Misserfolge zu sehen.

Sie sind wirklich schön - nicht wahr?



Kinder und Erwachsene sollten beim Puzzeln normalerweise mit einem Muster beginnen. Warum?

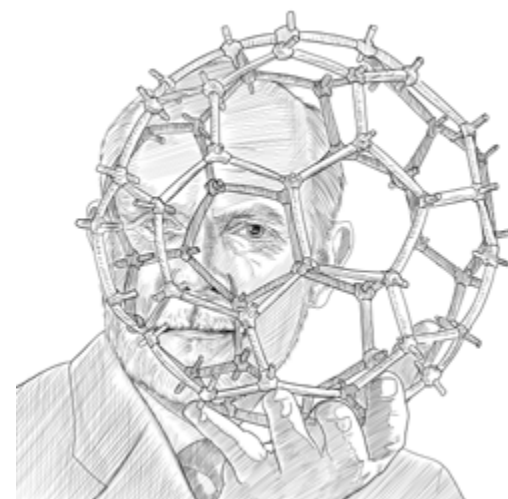
1. Weil das menschliche Gehirn gut darin ist, mit Mustern zu spielen. Ein Muster ist leichter zu durchschauen als ein zufälliger Lösungsversuch.
2. Normalerweise gibt es viel mehr zufällige als gemusterte Lösungsversuche. Muster lösen einen größeren Teil der Rätsel, als sie es verdienen. Das bedeutet, auch wenn dein Gehirn nicht gut mit Mustern umgehen kann, ist es ein guter Ausgangspunkt für die Suche nach einer Lösung.



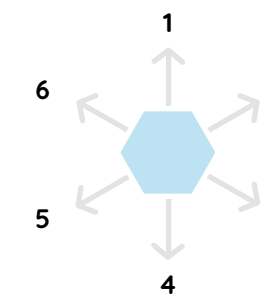
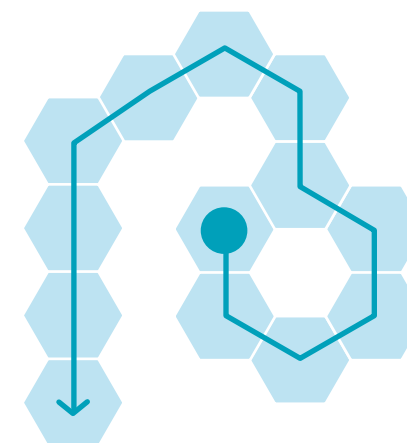
GRAPHEN-TRAMPOLIN

Eines Tages, mitten im Semester, hat der Chemiker **Richard Smalley** eine magische Kugel gebaut. Er wusste nicht, dass sie magisch war, bis er durch sie hindurch schaute. Plötzlich verließen seine Füße den Boden, er schrumpfte aus seinen Schuhen und wurde hineingesaugt.

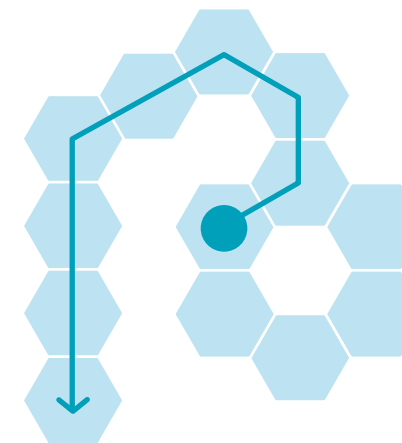
Er steckte dort für eine lange Zeit fest. Um sich zu amüsieren, sprang er von Kohlenstoffring zu Kohlenstoffring und benutzte sie als Trampoline. Schon bald begann er, Puzzles zu erstellen.



Ein Beispiel: Als er mit dem Kreis begann, würfelte Richard eine 3 und musste erneut würfeln. Dann würfelte er eine 4 und sprang in diese Richtung. Bei einigen anderen Sprüngen musste er mehrmals würfeln, aber das Ergebnis war eindeutig. Am Ende gewann er, indem er alle Trampoline besuchte.

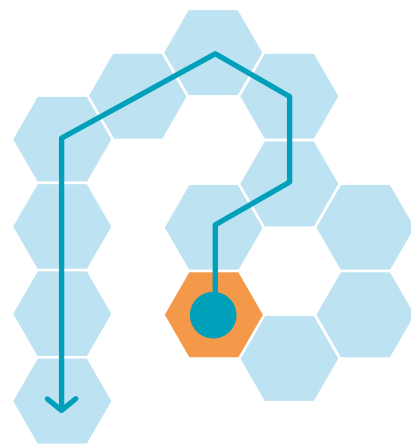


Hätte er jedoch beim Kreis angefangen und eine 2 gewürfelt, wäre er zum Scheitern verurteilt gewesen.

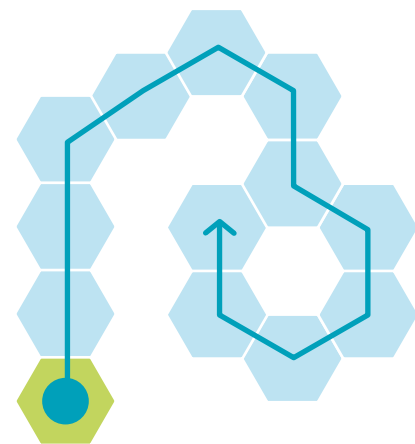




Startsechsecke, bei denen sowohl Erfolg als auch Misserfolg möglich sind, sind **gelb** eingefärbt.



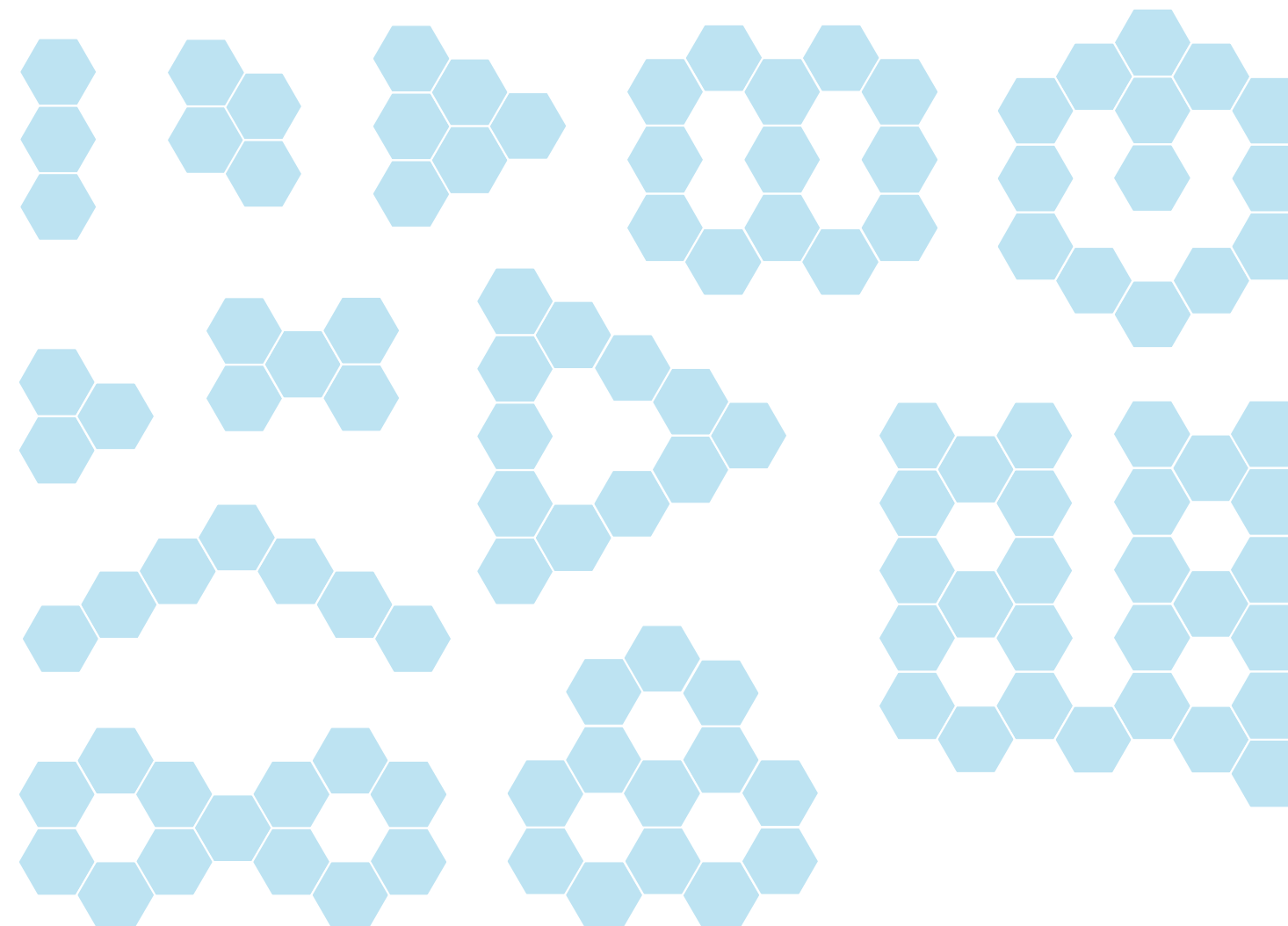
Startfelder, die immer scheitern, sind **orange** gefärbt. Es spielt keine Rolle, wie Richard würfelt. Ab hier wird er immer scheitern.

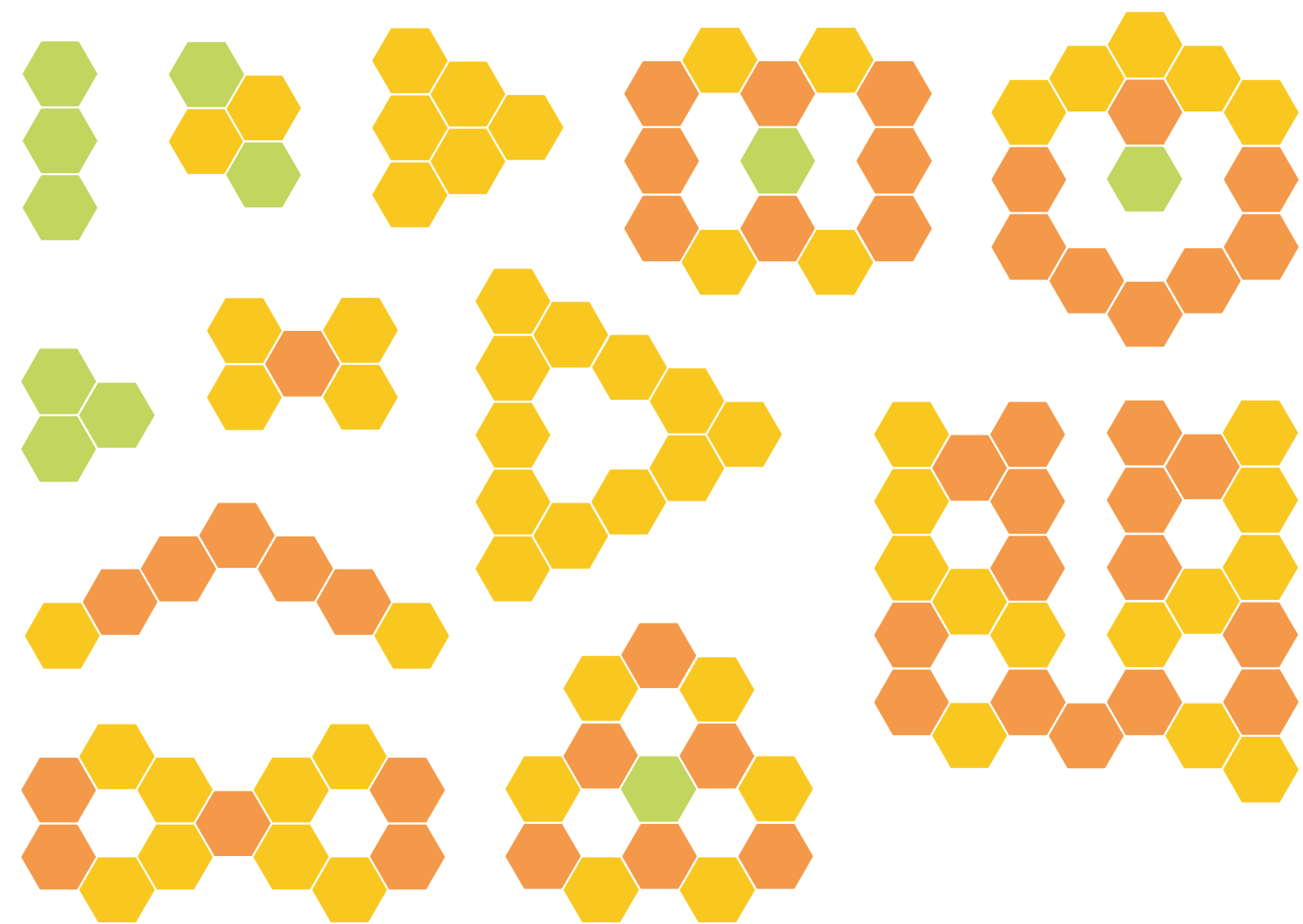
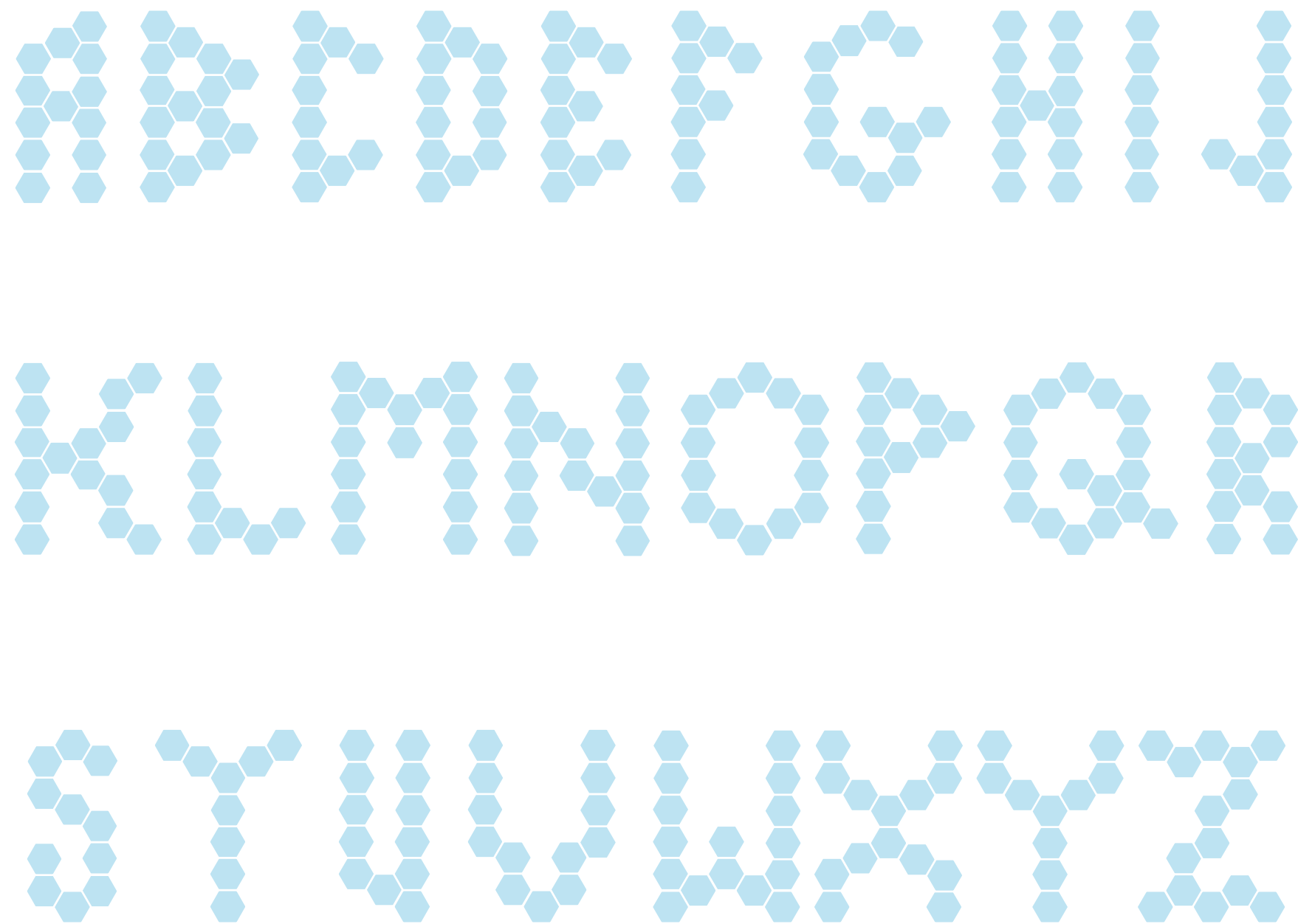


Startfelder, die immer erfolgreich sind, sind **grün** gefärbt. Es spielt keine Rolle, wie Richard würfelt. Er wird immer erfolgreich sein, wenn er hier beginnt.



Male auf den folgenden Seiten jedes Sechseck **gelb**, **orange** oder **grün** an.



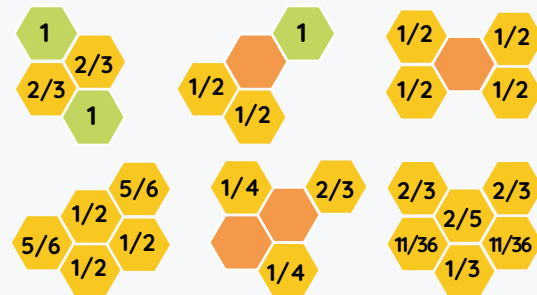


Die sechszwanzig Buchstaben des Alphabets auf der letzten Seite sehen für die meisten Mathematiker nicht gerade nach Spaß aus, aber du wirst feststellen, dass viele Kinder, die die abstrakten Rätsel abschreckend finden, von diesen vertrauten Formen angezogen werden.



Bisher war dies noch kein unendliches Rätsel. Jetzt machen wir es zu einem, aber nur für euch Gurkenmenschen! Ermittle die Gewinnwahrscheinlichkeit für jedes Sechseck zu Beginn. Die höchste Erfolgswahrscheinlichkeit ist 1. Wie hoch ist die zweithöchste Erfolgswahrscheinlichkeit für jedes Sechseck in jedem Puzzle? Finde die dritt- bis fünfthöchste Erfolgswahrscheinlichkeit. Mach weiter ...

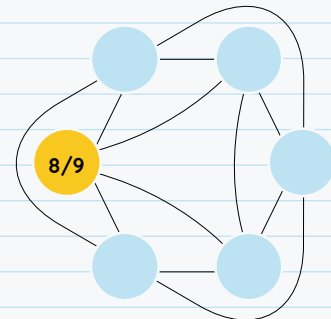
SPOILERALARM!



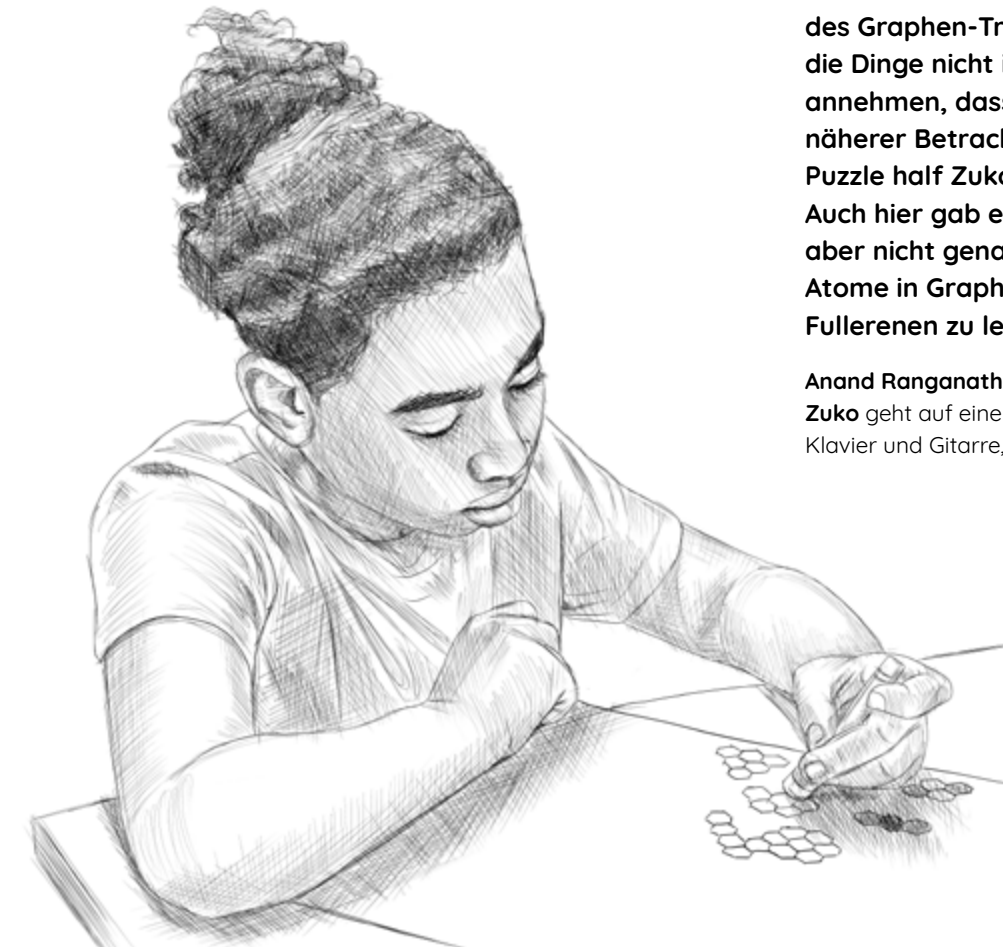
Die höchsten Erfolgswahrscheinlichkeiten, die ich gefunden habe, sind 1 , $5/6$, $29/36$ und $3/4$. Danach komme ich nicht mehr weiter und ich bin mir nicht einmal sicher, ob das die besten sind.



Nun ersetze diese sechseckigen Rätsel durch ein beliebiges planares Diagramm, bei dem die Wahrscheinlichkeit, sich von Knotenpunkt zu Knotenpunkt zu bewegen, gleichmäßig unter den verbundenen, nicht besuchten Knotenpunkten ausgewählt wird. **Die größte Erfolgswahrscheinlichkeit ist 1.** Was sind die nächstgrößeren Erfolgswahrscheinlichkeiten?



Die zweithöchste, die ich gefunden habe, ist $17/18$. Die dritthöchste war $8/9$ aus dem oktaedrischen Diagramm oben. **Ich bin mir nicht sicher, ob das die besten Werte sind.**



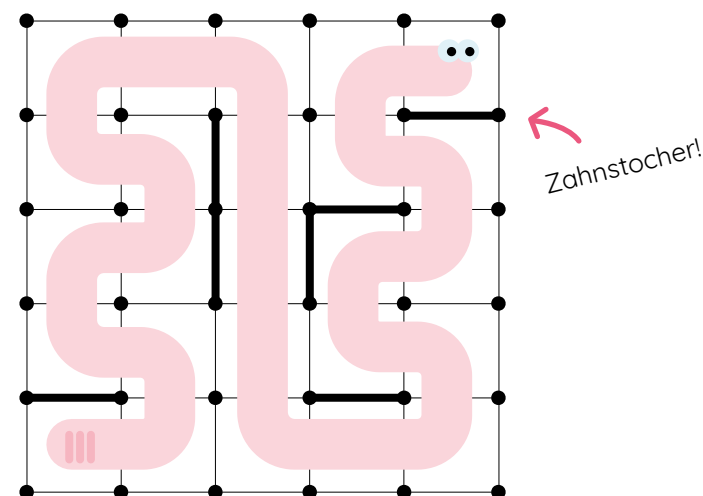
Zuko und ich hatten viel Spaß dabei, verschiedene Varianten des Graphen-Trampolin-Puzzles zu lösen. Dabei wurde klar, dass die Dinge nicht immer so sind, wie sie scheinen. Wir könnten annehmen, dass einige Sechsecke eine Farbe haben, aber bei näherer Betrachtung werden unsere Annahmen widerlegt. Das Puzzle half Zuko auch dabei, etwas über Symmetrie zu lernen. Auch hier gab es einige Rätsel, die zwar fast symmetrisch waren, aber nicht genau. Zuko hatte auch Spaß daran, etwas über die Atome in Graphen, über Richard Smalley und die Struktur von Fullerenen zu lernen.

Anand Ranganathan (Zukos Vater)

Zuko geht auf eine Grundschule in Stamford, Connecticut, USA. Er spielt gerne Klavier und Gitarre, sieht sich Serien an und spielt Spiele mit seiner Familie.

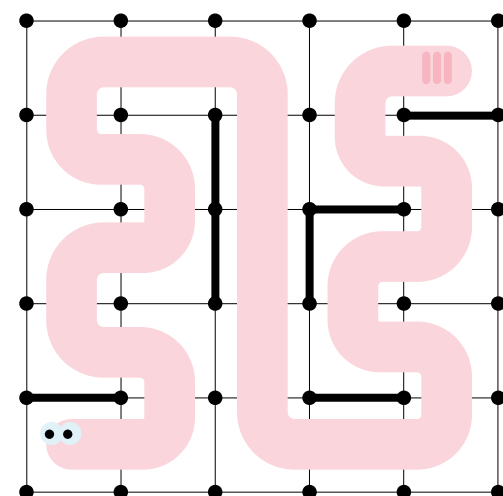
WILLIE WIGGEL WIGGEL WURM: ZAHNSTOCHER-LABYRINTHE

Willie Wiggle Wiggle Wurm ist ein guter Schüler, aber manchmal etwas zappelig. Benutze so wenig Zahnstocher wie möglich, damit Willie genau eine Möglichkeit hat, sich zu winden. Funktioniert das?



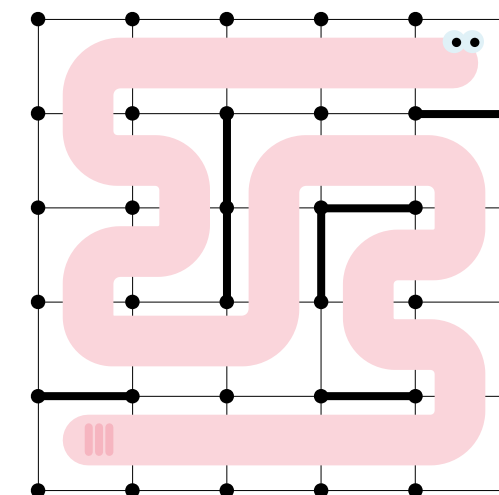
Nein - denn wenn Willie eine Lösung wie die obige findet, kann er einfach Kopf und Schwanz austauschen, um eine zweite Möglichkeit zu finden, sich zusammenzurollen! Lösungen gibt es immer paarweise.

Nehmen wir also an, dein Ziel ist es, die kleinste Anzahl von Zahnstochern zu finden, für die es genau ein Lösungspaar gibt. Diese Menge von sieben Zahnstochern ist nicht genug, denn es gibt noch ein weiteres Lösungspaar:

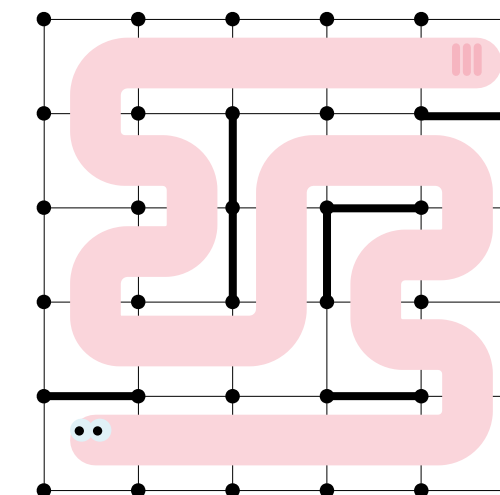


Finde das zweite Lösungspaar.

SPOILERALARM!

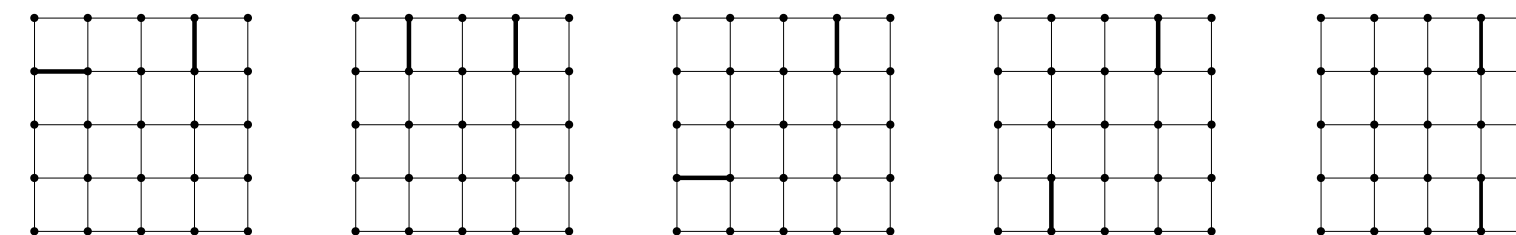


Hier ist das andere Paar. Versuche, die Mindestanzahl an Zahnstochern zu finden, die nötig ist, um nur ein Paar von Lösungen in 5x5- und 6x6-Kartons zu haben. **Ich werde die besten Lösungen teilen, die ich gefunden habe.** Für die 6x6 habe ich keine Lösung mit nur sechs Zahnstochern gefunden.



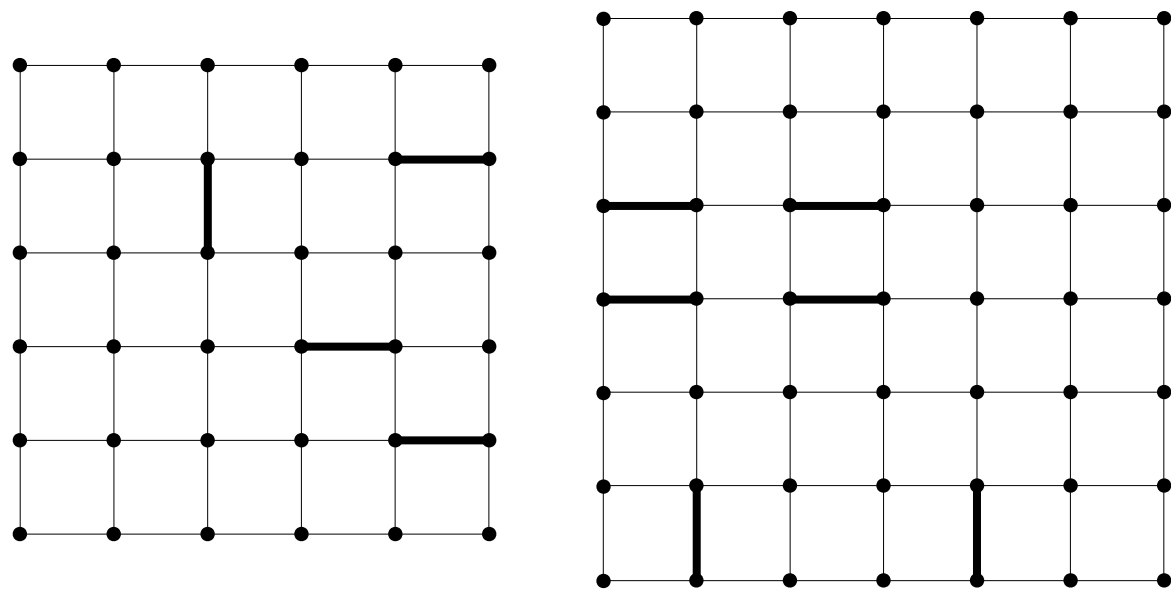
Ich vermute, dass sieben die wenigsten sind, die bei 6x6 möglich sind. Wie gut ich bei 5x5 abgeschnitten habe, kann ich dir erst sagen, wenn du es ausprobiert hast. Kleinere Kartons sind auch interessant. Für 3x3 Kartons braucht man nur zwei Zahnstocher. Ergibt eine dieser 4x4-Zahnstocher-Anordnungen nur ein einziges Lösungspaar?

SPOILERALARM!

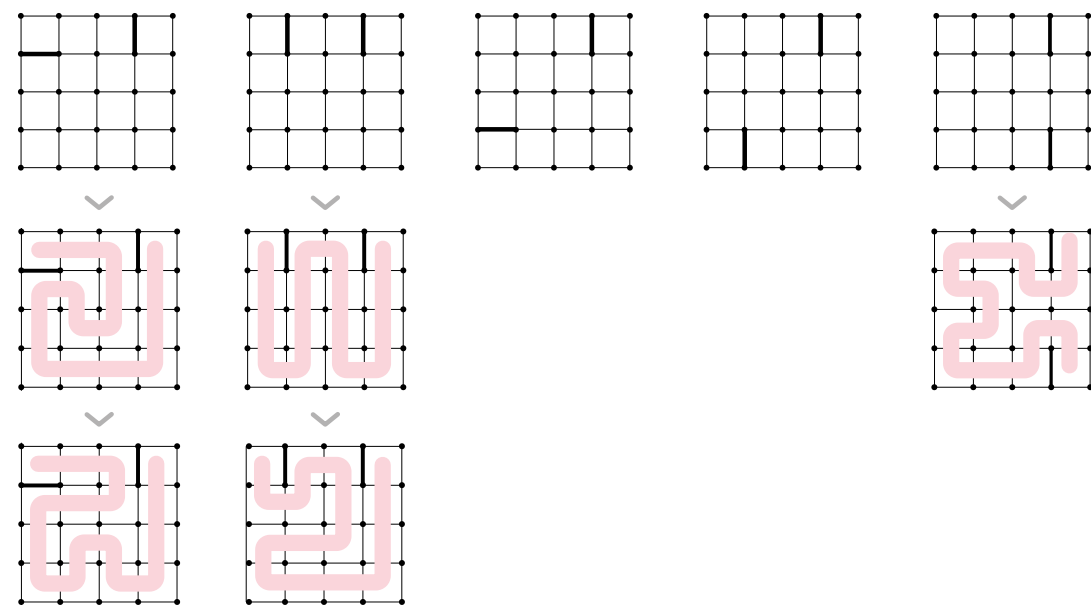


Die wenigsten Zahnstocher, die ich in einem 5x5-Karton gebraucht habe, waren vier. Die Idee mit den sechs Zahnstochern im 6x6-Karton funktioniert nicht, aber sie ist ziemlich nah dran! Es gibt zwei Paare von Lösungen. 😞

Ab jetzt werde ich nicht mehr beide Lösungen eines Paares zeigen - es ist nicht wirklich spannend, zu sehen, welches Ende der Kopf und welches der Schwanz ist.



Rechts sehen wir die Antwort auf die 4x4-Frage. Die ersten beiden haben mehr als eine Möglichkeit, wie Willie sich zusammenrollen kann. Die beiden nächsten sind unmöglich. **Der letzte funktioniert!** Zwei Zahnstocher reichen aus, um dafür zu sorgen, dass Willie nur ein Paar Möglichkeiten hat, sich zusammenzurollen.

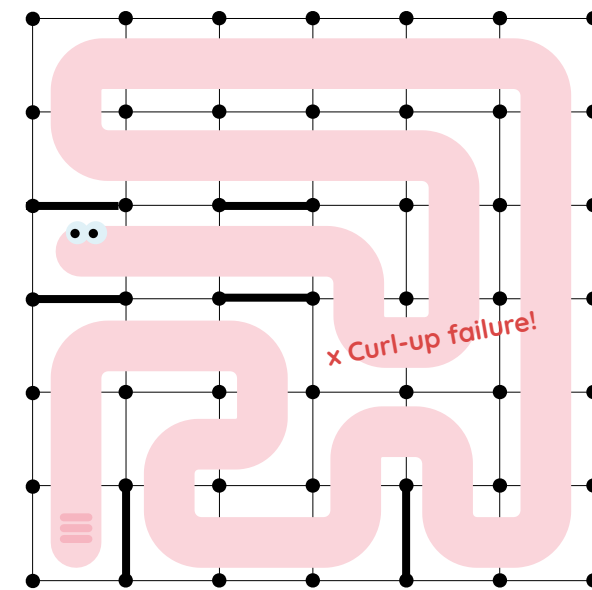
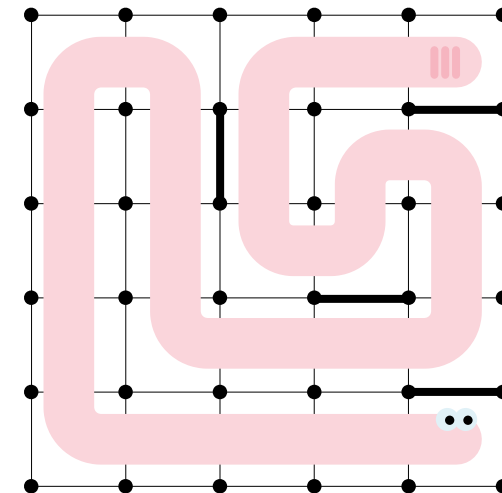


Es gibt auch andere Möglichkeiten, vier Zahnstocher in einem 5x5 zu platzieren, die eine Antwort ergeben. Wenn du also eine andere Lösung gefunden hast, kannst du dich freuen. 😊 Und wenn du eine Lösung mit weniger Zahnstochern gefunden hast - wow! Ich bin wirklich beeindruckt, aber du solltest deine Arbeit überprüfen!

Die Unendliche Gurke würde nicht so aufrichtig sein, wenn es nicht auch einen Misserfolg gäbe. Hier ist er. Während der Monate, in denen ich das Buch geschrieben habe, dachte ich, dass Willie nur ein Paar Möglichkeiten hat, sich in der 6x6 auf der rechten Seite zusammenzurollen. Ich lag falsch. Wenn du eine Lösung mit sechs Zahnstochern findest, bei der es nur ein Paar Möglichkeiten gibt, sich zusammenzurollen - wow! Ich wäre sowohl skeptisch als auch beeindruckt!

Die wenigsten Zahnstocher, die ich für ein 5x5, 6x6, 7x7 und 8x8 gefunden habe, sind 4, 7, 10 bzw. 11.

Die Schüler können Pläne vorschlagen und andere Schüler können versuchen, sie zu knacken, indem sie mehrere Möglichkeiten finden, wie Willie sich hinlegen kann. Es ist faszinierend zu sehen, wie sich die Kinder auf natürliche Weise in Labyrinth-Designer und Labyrinth-Brecher spezialisieren.



Da Willie nicht am Daumen lutschen kann, um einzuschlafen, rollt er sich manchmal in einer Schleife zusammen und lutscht an seinem Schwanz.

- Wie viele Zahnstocher braucht er am wenigsten, damit er nur eine Möglichkeit hat, das in einem 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 oder 6x6 großen Karton zu tun?
- Was ist mit Rechtecken der Breite 2?
- Breite 3?
- Breite 4?

SPOILERALARM!

Die Idee, eine Schleife zu bilden, stammt von Oscar, einem siebenjährigen Jungen in einem meiner Online-Kurse. Wann immer du eine gute Idee von deinen Schülern bekommst, macht es Spaß, sie auszuprobieren! **Danke, Oscar.** 🍎



Das ist eines meiner Lieblingsrätsel. Ich habe nicht daran gedacht, dass es ein Tier ist. Ich habe nur daran gedacht, dass es eine Schleife ist. Eine Schleife ist ein anderes Rätsel als eine einfache Linie. Eine Schleife ist oft eine größere Herausforderung. Ich bin mir nicht sicher, warum es schwieriger ist, aber es ist einfach so. Wenn du die Dimensionen auf vier oder mehr stellst, oder wirklich mit 3x4 anfängst, macht es Spaß. Das ist eine Kombination aus Geometrie und Logik und vielleicht ist auch ein bisschen Diagrammtheorie dabei.

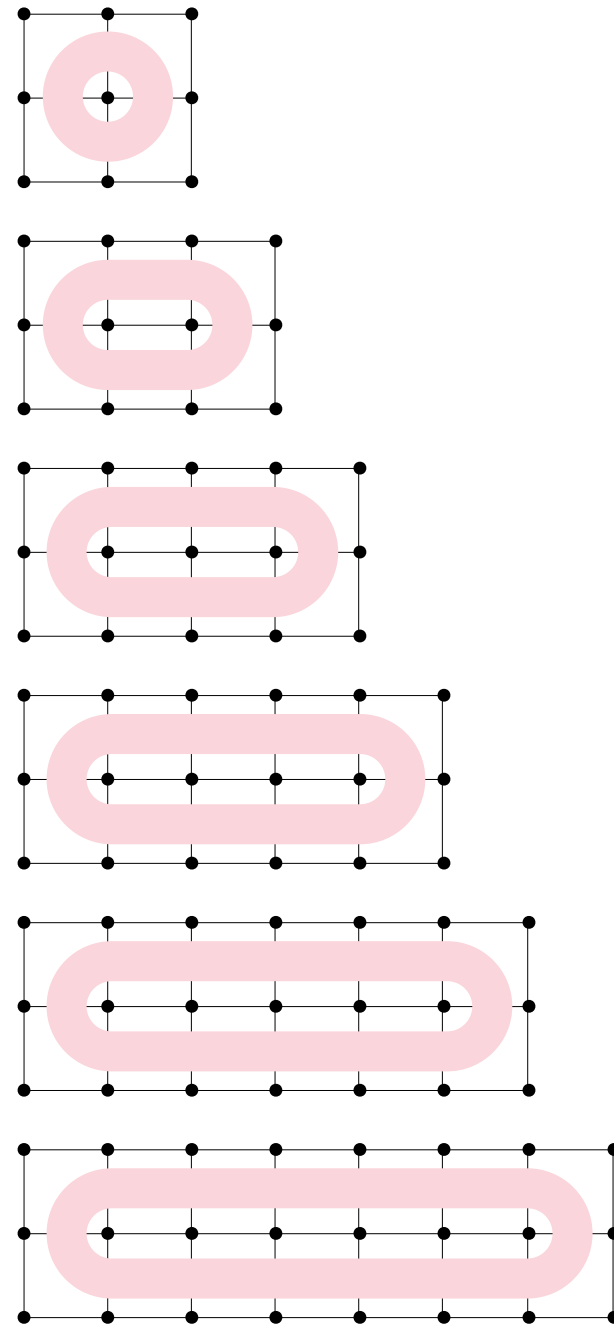
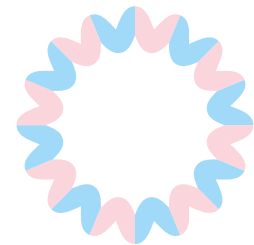
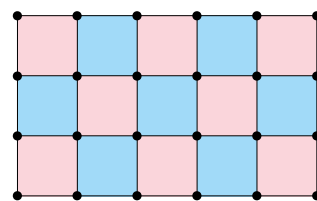
Oscar wurde in New York City geboren und lebt jetzt in Kalifornien. Im Alter von sieben Jahren ist er bereits in jeder Hinsicht ein Mathematiker, außer dass er einen Abschluss hat. Er ist Autodidakt.



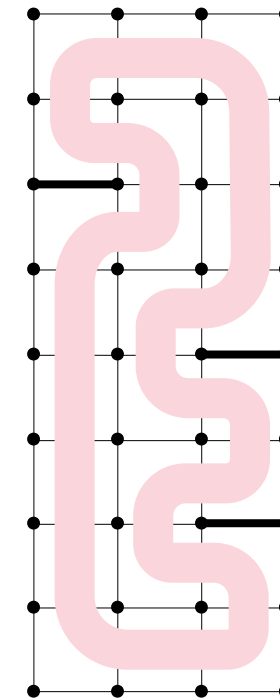
Zunächst wollen wir anerkennen, wie unglaublich langweilig es für Willie ist, sich in eine Schleife für einen beliebigen rechteckigen Karton zu legen, der die Breite 2 hat. Es werden keine Zahnstocher benötigt.

Ein 3x3 Quadrat und alle Rechtecke mit einer ungeraden Anzahl von Quadraten sind ein bisschen schwieriger. Genau genommen sind sie unmöglich. Warum ist das so?

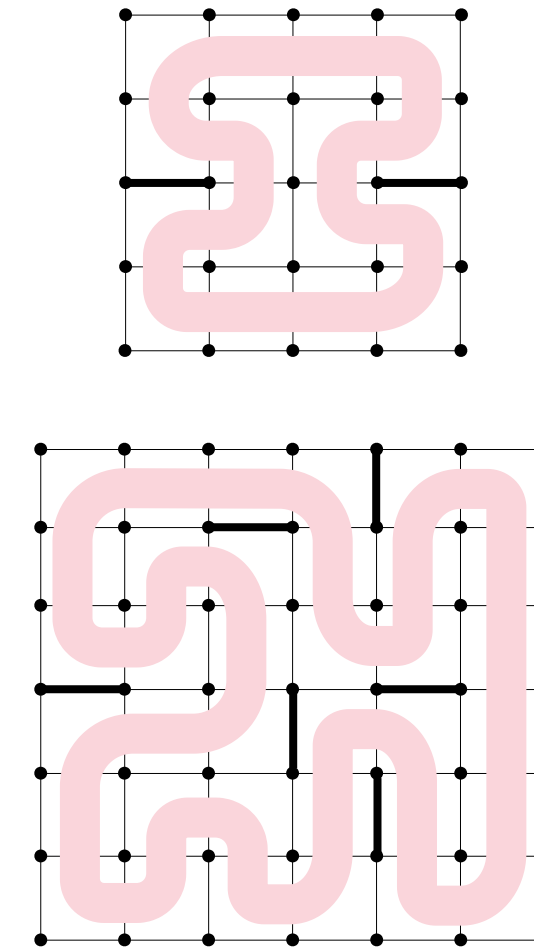
Überlege dir, wie Willie aussieht, wenn er sich in einen Karton legt, der frisch mit einem Schachbrettmuster bemalt ist. Sobald die Farbe getrocknet ist, hat Willie ein prächtiges, abwechselndes Muster - ein Muster mit einer geraden Anzahl von Streifen! Willie ist sich ziemlich sicher, dass es da irgendwo einen Widerspruch gibt.



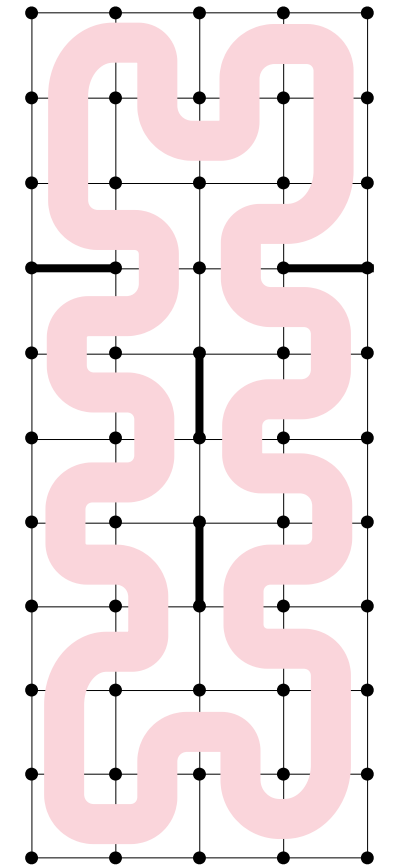
Für ein 3x4-Rechteck brauchst du einen Zahnstocher, für ein 3x6-Rechteck zwei Zahnstocher und für ein 3x8-Rechteck (unten) drei. Die Zahnstocher können alle auf der linken Seite oder alle auf der rechten Seite oder eine Mischung sein. Dieses Muster setzt sich bei 3x10, 3x12 usw. fort.



Für ein 4x4-Quadrat brauchst du zwei Zahnstocher. Für das 6x6 werden höchstens sechs Zahnstocher benötigt. Ist das die beste Lösung? Ich weiß es nicht.



Für das 4x10-Rechteck braucht man nur vier Zahnstocher! Dieses Muster kann für längere Rechtecke der Breite vier erweitert werden.



PINOCCHIOS SPIELKAMERADEN

Als Pinocchio in die Schule kommt, hat er die traurige Fähigkeit, einige seiner ehrlich sprechenden Klassenkameraden in Lügner zu verwandeln.

In seiner ersten Klasse sitzen 16 Schüler mit Tischen in einem 4x4 Klassenzimmer.

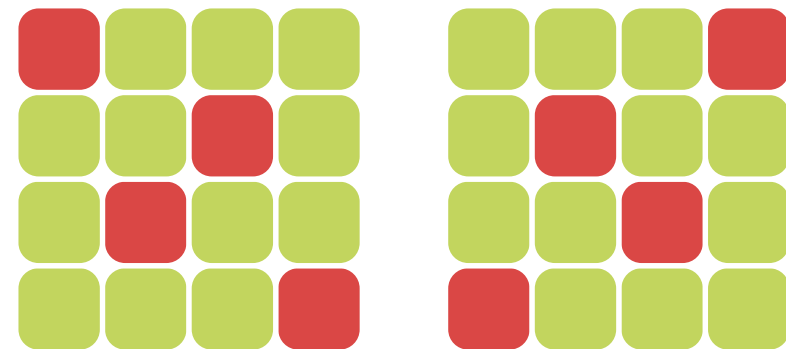
Pinoccchios Lehrer fordert die Schüler auf, nur dann die Hand zu heben, wenn sie neben (links-rechts-vorne-hinten) genau zwei gleichgesinnten Schülern sitzen. **Was machen die Schüler?**

- Ein Wahrheitssprecher hebt seine Hand nur, wenn er neben genau zwei Wahrheitssprechern sitzt.

- Ein Lügner lügt. Wenn er neben genau zwei anderen Lügnern sitzt, hebt er seine Hand nicht. Ansonsten tut er es.

Wenn der Lehrer die Frage stellt, heben alle Kinder ihre Hände! Wie viele der 16 Schüler sind Lügner und wie könnten sie im 4x4 Klassenzimmer sitzen?

SPOILERALARM!

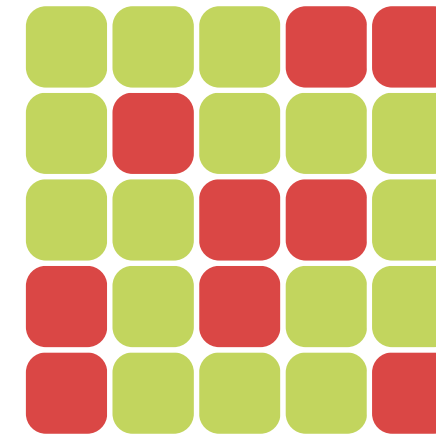


Es gibt vier Lügner. Die Klasse befindet sich in einem der beiden Muster auf der linken Seite. Die zwölf Wahrheitssprecher sind **grün**. Die Lügner sind **rot**.

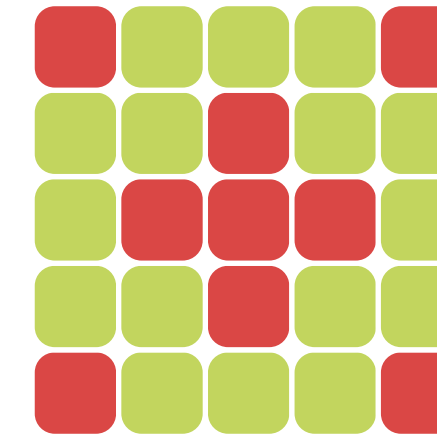
Pinocchios nächstes Klassenzimmer ist 5x5. Der Lehrer stellt die gleiche Frage und bekommt das gleiche Ergebnis! Alle Schüler heben die Hand. Wie viele Schüler sind Lügner und wie könnten sie umgesetzt werden?

Das funktioniert nicht. Warum nicht?

Es klappt nicht, weil der Schüler in der Mitte ein Lügner ist. Er sitzt neben zwei anderen Lügnern, wenn er also die Hand heben würde, würde er die Wahrheit sagen.



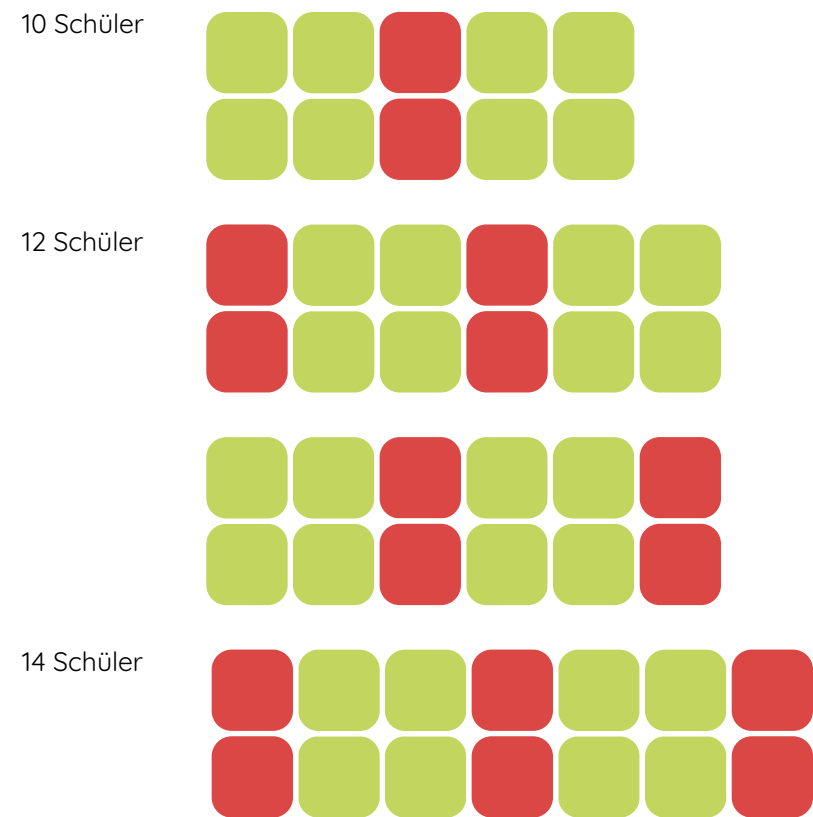
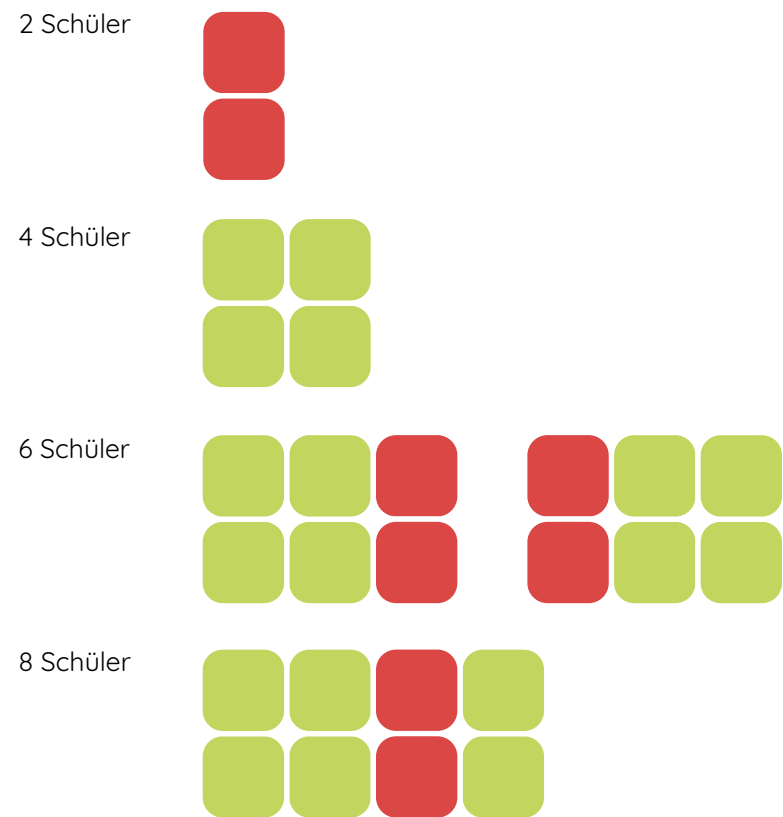
Es gibt nur eine Lösung für das 5x5-Klassenzimmer. Es gibt genau 9 Lügner und 16 Wahrheitssprecher.



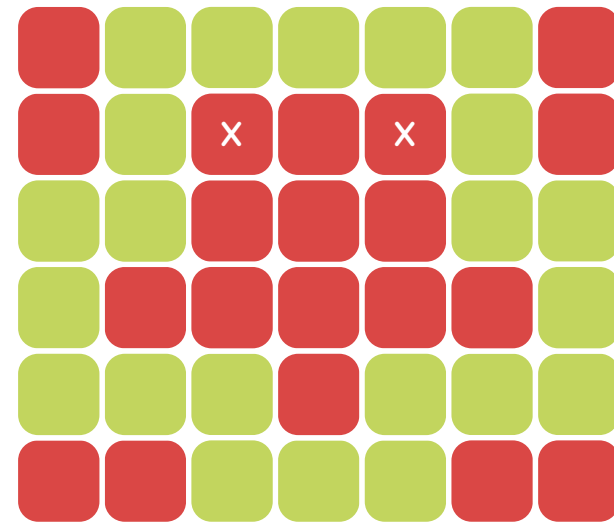
Wenn die Schüler sich für die Pause fertig machen, stehen sie manchmal im Gang an. Er ist gerade breit genug, damit zwei Schüler nebeneinander stehen können. Finde für eine gerade Anzahl von Schülern alle möglichen rechtwinkligen Anordnungen von Lügnern und Wahrheitssagern, so dass alle Schüler die Hand heben, wenn sie gefragt werden, ob sie neben genau zwei gleichgesinnten Schülern stehen. Diese Übung stammt von der taiwanesischen Pädagogin **CinJhih Zeng**.

SPOILERALARM!

Wenn sich die Schüler im Flur aufstellen, gibt es nur eine Möglichkeit - es sei denn, die Zahl der Schüler ist ein Vielfaches von drei. Dann gibt es zwei Möglichkeiten.



In welchen Klassenzimmern können alle Schüler ihre Hände heben? Ist das mit 5x6, 5x7, 6x6 oder 6x7 Rechtecken möglich? Das 6x7-Rechteck unten funktioniert nicht, weil einige Schüler in der zweiten Reihe ihre Hände nicht heben.



6x6, 7x7, 8x8 und 9x9 Klassenzimmer heben alle ihre Hände. Weißt du in jedem Fall, wie viele Wahrheitsverkünder es in der Klasse gibt?

SPOILERALARM!

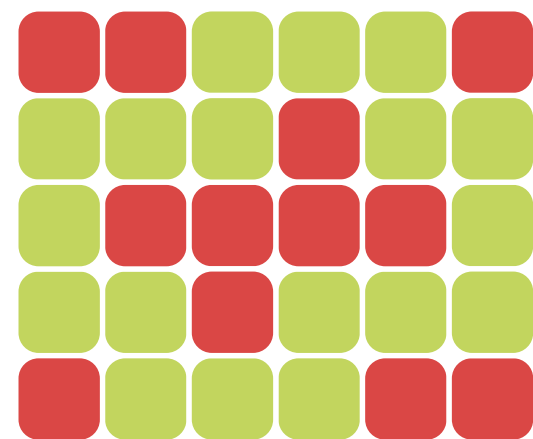
Zu Beginn dieser Woche habe ich Pinocchios Spielkameraden ausprobiert, nachdem meine Klasse ein paar Wahrheitsfälscher- und Lügnerprobleme gespielt hatte. Es war großartig.

Statt nur Quadrate und dicke Rechtecke zu betrachten, wie in Gords ursprünglichem Puzzle, habe ich meine Kinder ermutigt, ein Muster mit langen, dünnen Rechtecken der Breite 2 zu finden. Ich erzählte Gord davon und er hat es übernommen - außerdem hat er das Puzzle um Friesmuster ergänzt.

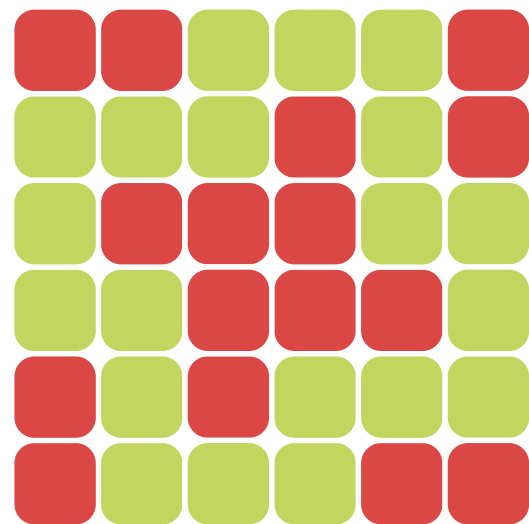
Cin Jhih Zeng unterrichtet Mathe mit Origami und Puzzles. Er entwickelt Mathematik-Lehrpläne, entwirft seine eigenen Puzzles und hilft bei der Leitung des Math Board Game Camps in Taipeh.



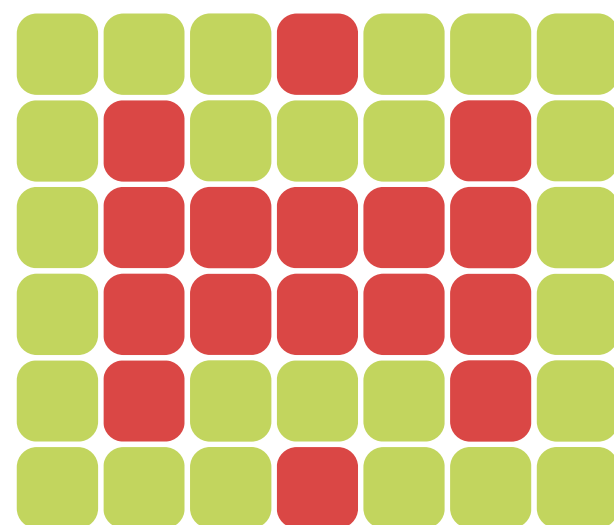
Hier sind die Lösungen für die 5x6, 6x6 und 6x7 Rechtecke. Das 5x7-Rechteck halte ich für unmöglich. **Gib deiner Klasse regelmäßig unmögliche Aufgaben.**



5x6

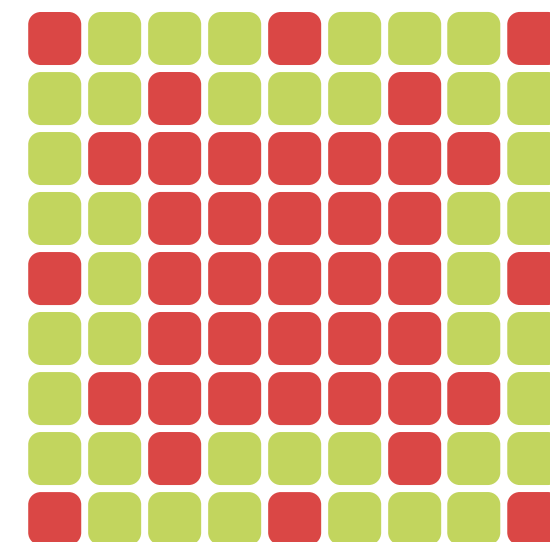


6x6

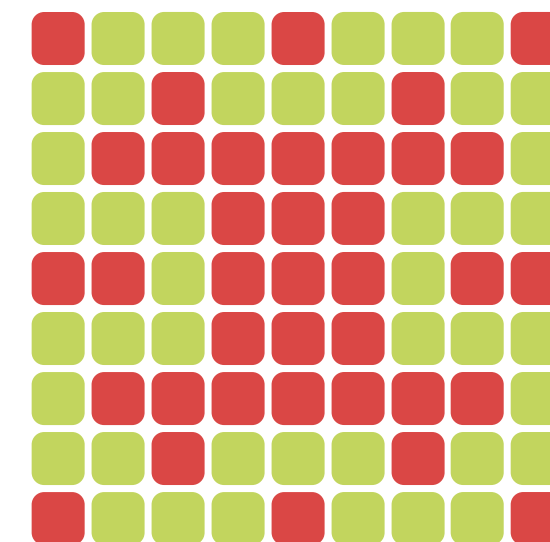
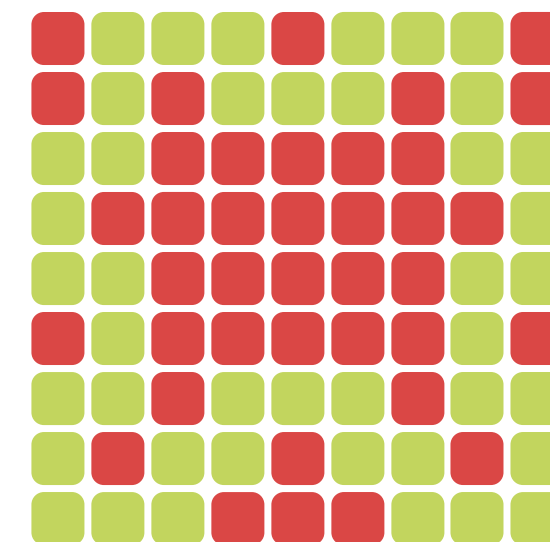


6x7

Füttere deine Klasse mit unmöglichen Problemen regelmäßig.



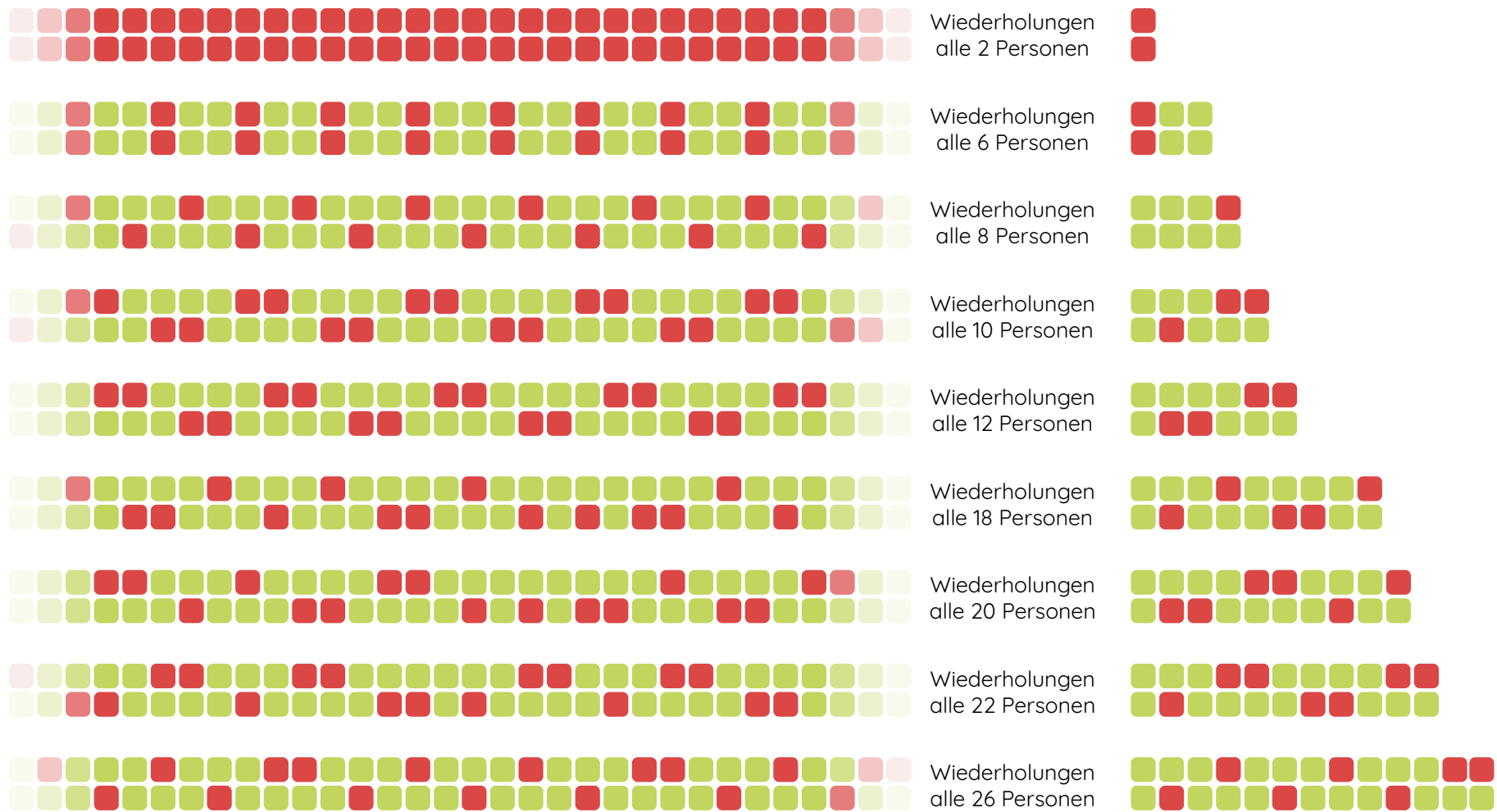
Das 6x6-Klassenzimmer hat entweder 20 oder 24 Wahrheitssprecher. Das 7x7-Klassenzimmer hat 28 Wahrheitssprecher. Das 8x8-Klassenzimmer hat 32 Wahrheitssprecher. Alle größeren Quadrate können eine unterschiedliche Anzahl von Wahrheitsspendern haben. Das 9x9-Klassenzimmer oben hat zwischen 40 und 44.



Als Pinocchio seinen Abschluss gemacht hat, stellt er fest, dass seine Fähigkeiten im Umgang mit der Wahrheit sehr geschätzt werden. Laut Pinocchio, dem Politiker, stehen unendlich viele Menschen Schlange, um ihn sprechen zu hören. Finde einige periodische Muster, die Pinocchios Behauptung möglich machen, wenn der Flur zwei breit ist.

Welche Perioden sind möglich?

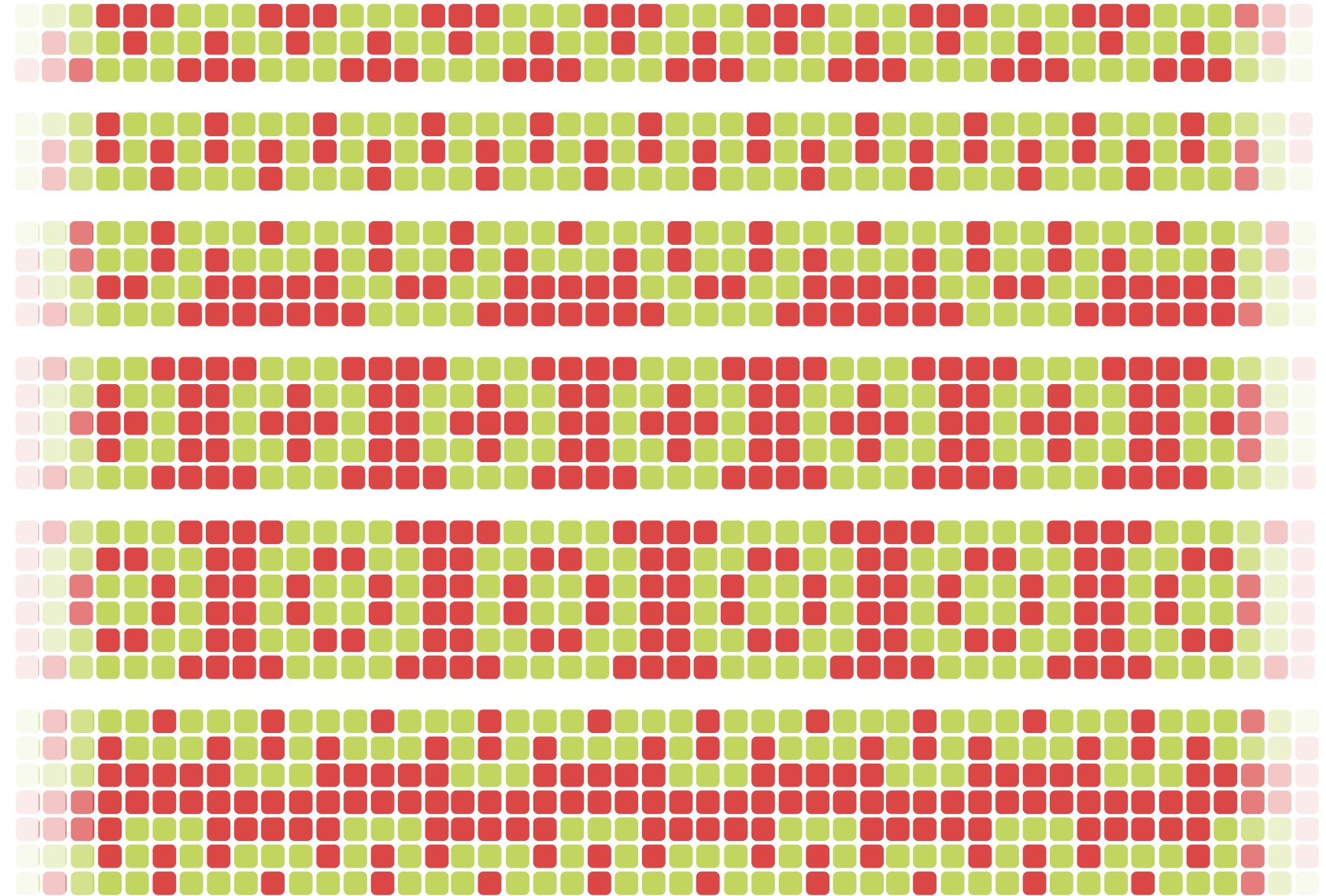
SPOILERALARM!



Wir können die Lösungen danach ordnen, wie häufig sie sich wiederholen. Die untere Lösung wiederholt sich alle 26 Personen. Finde heraus, wie sich unendlich viele Menschen aufstellen könnten, wenn der Flur 3, 4, 5, 6 oder 7 breit wäre. Es kann sein,

dass eine dieser Breiten unmöglich zu lösen ist - ich habe keine Lösung gefunden. Oh! Eine weitere Regel: Wir müssen Lösungen - wie die oberste - ablehnen, die eine Reihe mit lauter Lügner haben. **Lügner wissen, dass sie schlauer sein müssen als das!**

Die Zahlen 4, 14, 16 und 24 scheinen unmöglich, aber jede gerade Zahl nach 26 ist möglich.



Diese beiden Seiten sind nur für Menschen, die verrückt sind.

Ich habe keine Lösung für einen Flur der Breite 7 gefunden. Diese scheitert daran, dass sie eine Reihe von Lügner hat.

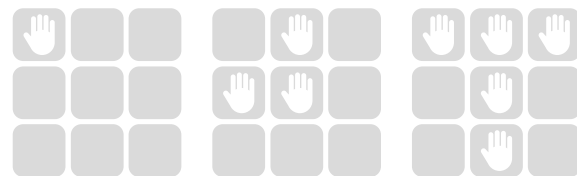
Welche Muster von Wahrheitssprechern und Lügnern würden diese kleinen 2x2 Klassenzimmer funktionieren lassen? Wie du sehen kannst, heben nicht alle Schüler die Hand:



Diese Methode, Pinocchio's Spielkameraden in den Unterricht einzuführen, stammt von **Vinay Nair**, dem Mitbegründer der Raising A Mathematician Foundation in einem Vorort von Mumbai, Indien. Im Folgenden findest du einige Antworten, wobei grün für die Schüler steht, die die Wahrheit sagen. Das ganz rechte 2x2-Quadrat ohne erhobene Hände ist unmöglich.



Hier sitzen einige von Pinocchio's Spielkameraden in einem 3x3-Klassenzimmer. Welche Sitzordnung könnte dazu führen, dass diese Hände erhoben werden?



Hier sind einige Sitzordnungen, die zu diesen erhobenen Händen geführt haben könnten:



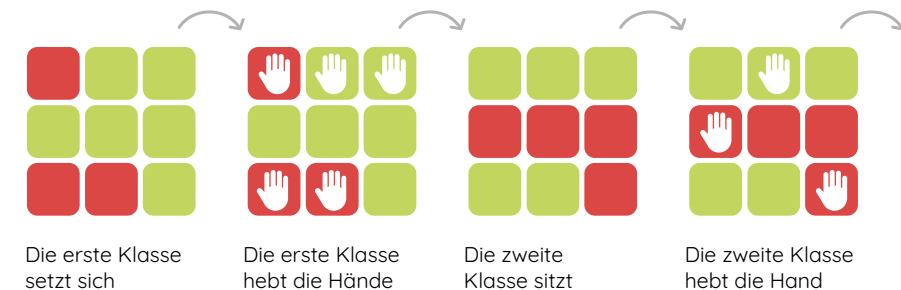
Ist dir aufgefallen, dass eine asymmetrische Sitzordnung manchmal zu einer symmetrischen Anordnung der erhobenen Hände führt? Trifft auch das Gegenteil zu? Kann ein symmetrischer Sitzplan jemals zu einem asymmetrischen Plan mit erhobenen Händen führen? Nein. Das ist Pinocchio's auf den Kopf gestellte Entropie! Dinge können mehr organisiert werden, aber niemals weniger organisiert.

In einem Klassenzimmer mit n Schülern gibt es 2^n Möglichkeiten, wie Lügner und Wahrheitsverkünder sitzen können, und 2^n Muster, wie die Hände gehoben werden können. Eine Folge von Pinocchio's umgedrehter Entropie ist, dass nicht alle Muster der erhobenen Hände gesehen werden.

Wie viele Muster für erhobene Hände werden unmöglich sein? Welches ist vermutlich das häufigste?

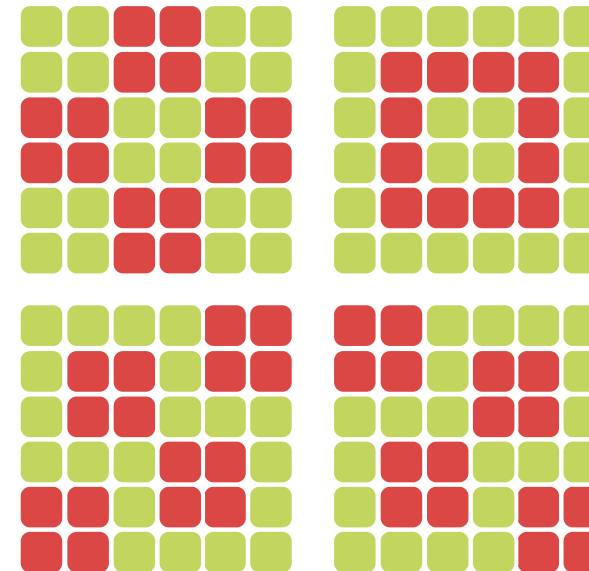


Stell dir vor, dass nach einer 3x3 Klasse eine neue Gruppe von Pinocchio's Spielkameraden das Klassenzimmer betritt. Die Wahrheitssprecher sitzen auf den Plätzen, die in der vorherigen Klasse die Hände gehoben haben; die Lügner sitzen auf den übrigen Plätzen. Das wiederholt sich Klasse für Klasse. Hier ist ein Beispiel dafür, was passiert:



Finde alle Sitzordnungen in einem 6x6-Klassenzimmer, in dem die Lügner und die Wahrheitssprecher auf denselben Stühlen sitzen, Klasse für Klasse.

Es gibt acht 6x6 Klassenräume, die von Klasse zu Klasse gleich bleiben. Das sind vier. In den anderen vier werden einfach die Lügner und die Wahrheitssprecher ausgetauscht.



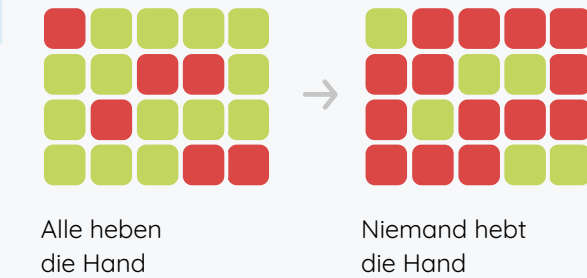
Den Schülern macht es Spaß, kreativ zu sein und ihre eigenen Varianten von Rätseln zu entwerfen. Meist werden sie trivial oder uninteressant sein, aber es wirkt befreiend, wenn die Schüler erkennen, dass Regeln geschaffen werden und verändert werden können. Das ist selbst dann von Vorteil, wenn du dich entscheidest, keine der Varianten weiterzuverfolgen.

Die folgenden Vorschläge sind das Ergebnis eines zehnminütigen Brainstormings mit zwei Klassen von Schülern der Jahrgangsstufen 10 und 11. Jeweils eine Schülerhypothese habe ich mit aufgenommen. Eine lebendige Matheklasse zeichnet sich dadurch aus, dass es viele falsche und richtige Hypothesen gibt, also erwarte nicht, dass alle Hypothesen richtig sind.



IDEA #1 — Niemand!

Anstatt dass alle ihre Hand heben, hebt niemand seine Hand.

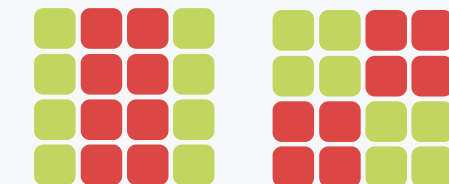


Hypothese: Tausche Lügner und Wahrheitssprecher in einer Klasse aus, die das ursprüngliche Rätsel gelöst hat, um eine Lösung für dieses Rätsel zu finden.

IDEA #2 — Halb & halb!

Anstatt dass alle Schüler die Hand heben, hebt genau die Hälfte die Hand.

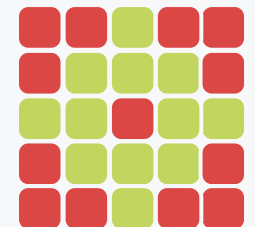
Hier sind zwei Lösungen für ein 4x4 Klassenzimmer:



Hypothese: Bei allen Lösungen gibt es 50/50 Lügner/Wahrheitssager.

IDEA #3 — Diagonale!

Anstatt dass die Schüler die Hand heben, wenn sie neben (links-rechts-vorne-hinten) genau zwei gleichgesinnten Schülern sitzen, fragt der Lehrer, ob sie diagonal neben genau zwei gleichgesinnten Schülern sitzen. Hier ist ein Beispiel für ein 5x5-Klassenzimmer, in dem alle Schüler ihre Hand heben:



Hypothese: Alle Lösungen haben Lügner in den Ecken.

Blubbernde Kessel

Die Macbeth-Hexen stiften Unruhe.

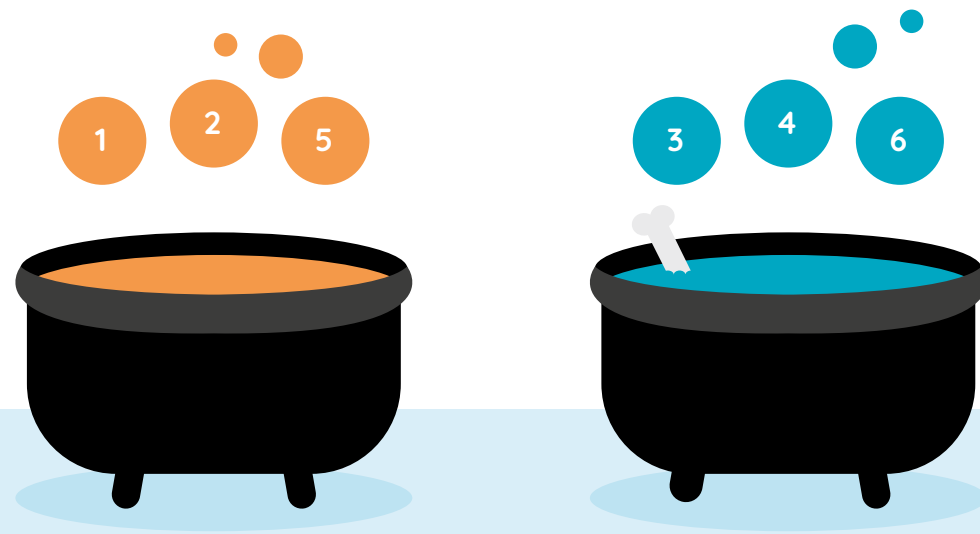
Lege nacheinander Frösche in einen Kessel, beginnend mit Frosch Nr. 1, dann Frosch Nr. 2, usw. Wenn zwei Frösche in einem Kessel zu einem neuen Frosch hinzukommen, gibt es eine Explosion.

Jetzt ist es an der Zeit, Frosch Nr. 7 in einen der unten stehenden Kessel zu legen. Welchen wählst du?

Das ist eine Fangfrage, denn in beiden Fällen kommt es zu einer Explosion: $2+5=7$ im linken Kessel und $3+4=7$ im rechten Kessel.

Beginne wieder mit Frosch Nr. 1. **Wie viele Frösche kannst du nacheinander in die Kessel legen, ohne eine Explosion auszulösen?**

SPOILERALARM!



Beginne bei einer Klasse mit jungen Kindern nicht damit, die Regeln zu erklären. Versuche stattdessen, ein emotionales Interesse zu wecken. Bringe so viele Kinder wie möglich dazu, etwas zu dem Rätsel beizutragen.

LEHRER: Anna, in welchen Kessel willst du Frosch Nr. 1 legen?

ANNA: "Den orangenen."

LEHRER: "Alonzo, in welchen Kessel willst du Frosch Nr. 2 legen?"

ALONZO: "Wieder in den linken."

Die Kinder verstehen immer noch nicht, was hier los ist. Das ist in Ordnung. Kinder sind es gewohnt, auf diese Weise zu lernen. Mach weiter, bis ...

BEATRICE: "Leg Frosch Nr. 7 in den rechten Kessel."

LEHRER: "Ka-boom! Er ist explodiert! Du wurdest **reingelegt**. Beatrice! Warum? Weil zwei Zahlen im Kessel bereits die Summe 7 ergeben ...

BEATRICE: " $3+4=7$ "

Welches Kind würde nicht gerne **reingelegt werden?** Reingelegt zu werden bedeutet eigentlich Versagen, aber indem du spielerisch mit dem Wort umgehst, entfernst du das Stigma des Versagens aus dem Klassenzimmer.

LEHRER: "Hättest du es vermeiden können, **reingelegt zu werden**, wenn du den anderen Kessel gewählt hättest?"

BEATRICE: Ja ...nein ... $2+5 = 7$ "

LEHRER: "Stimmt, egal was du getan hättest, du wärst am Ende **reingelegt worden!** LOL!! 😂

Die Pädagogin Skona Brittain verschweigt die Regeln sogar noch länger als ich. Sie lässt die Schüler sie durch wiederholte Explosionen entdecken. Das muss ich ausprobieren!

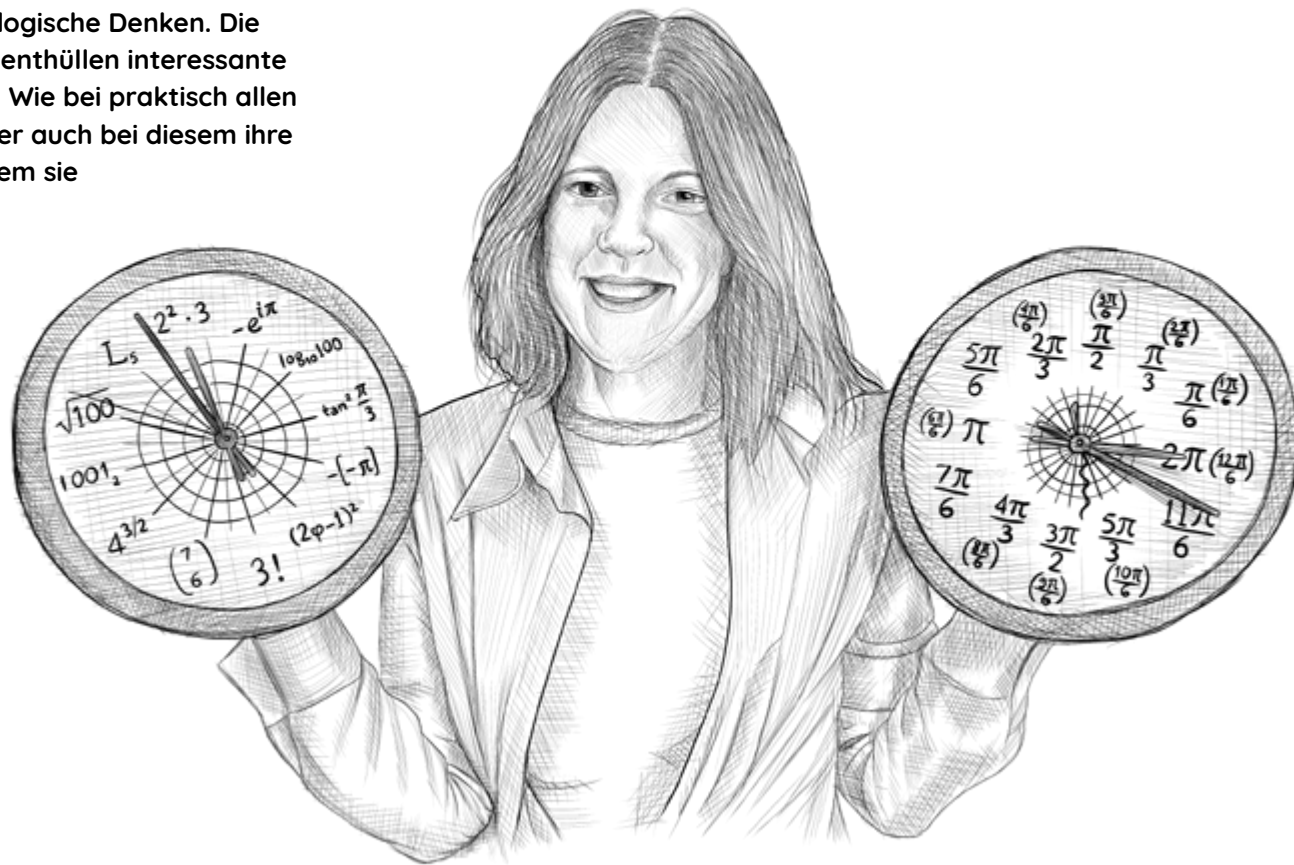


Issai Schur ist ein russischer Mathematiker, der an der Universität Berlin bei Ferdinand Frobenius studiert hat (dessen Münzproblem leicht in diese Sammlung hätte aufgenommen werden können). Als weltlicher Jude wurden Issai in Nazi-Deutschland alle akademischen Namen aberkannt; er floh 1939 nach Palästina, wo er in Armut starb.

Blubbernde Kessel ist von seiner Arbeit inspiriert.

Ich liebe diese Beschäftigung zu Halloween - ich habe sogar kleine Plastikkessel gekauft, um sie dafür zu benutzen. Ich hatte damit Erfolg bei vielen Kindern - von der ersten bis zur achten Klasse. Das Grundrätsel trainiert sowohl das Rechnen als auch das logische Denken. Die Erweiterungen auf andere Reihen enthüllen interessante zahlentheoretische Eigenschaften. Wie bei praktisch allen Rätseln von Gord können die Kinder auch bei diesem ihre eigenen Versionen entwickeln, indem sie die Reihenfolgen abändern.

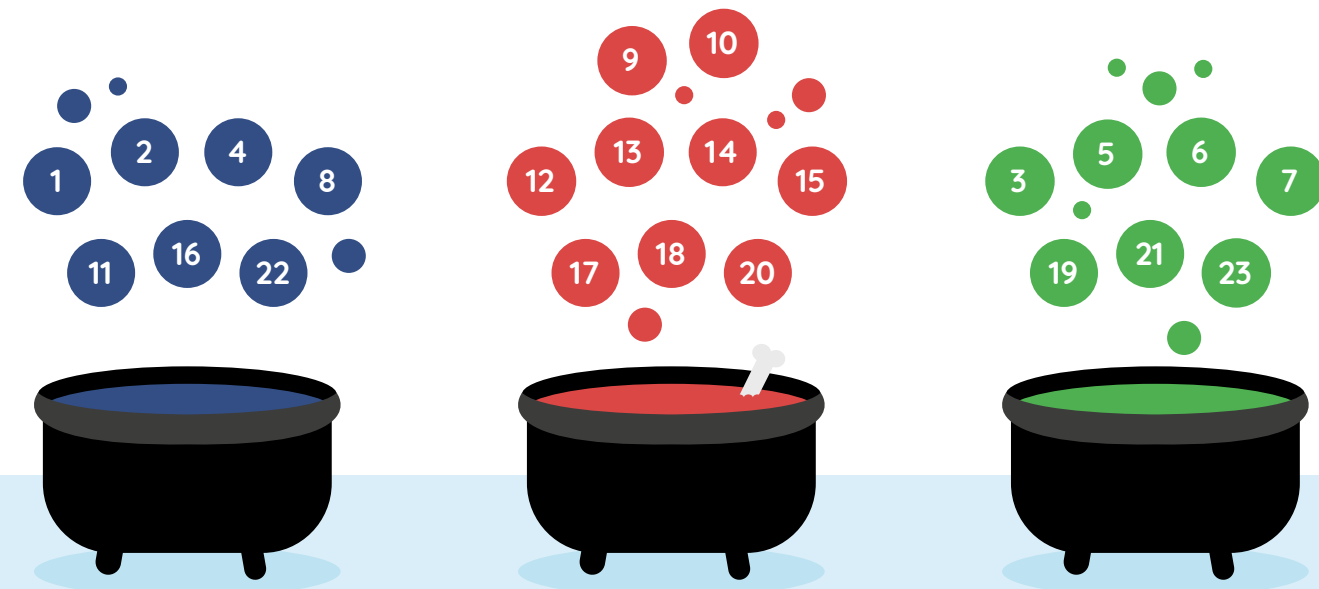
Skona Brittain ist mit ihren skurrilen mathematischen Uhren zur Unternehmerin geworden. Mit ihren Kindern Shelly und Sandy begann sie mit dem Heimunterricht und leitet jetzt einen exzentrischen Mathematik-Zirkel, die Santa Barbara Math Ellipse.



Dieses unendliche Rätsel, das immer wieder auftaucht, wurde erstmals 1916 von dem Mathematiker Issai Schur erforscht. Wenn zwei Schüler einen Weg gefunden haben, acht Frösche in die beiden Kessel zu legen (besser geht es nicht; neun Frösche sind unmöglich), gib ihnen einfach eine der folgenden Aufgaben:

- Beginne mit 1 und lege so viele ODD-Frösche wie möglich in zwei Kessel.
- Lege so viele GERADE Frösche wie möglich in zwei Kessel. Wie immer musst du mit der kleinsten geraden Zahl beginnen und dich hocharbeiten ... 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, usw. Das Beste, was du erreichen kannst, ist 16. (Ist es Zufall, dass 16 das Doppelte der 8 Frösche aus dem Originalrätsel ist?)
- Bringe so viele Frösche wie möglich in drei Kesseln unter. Die bestmögliche Antwort steht unten. Ich habe noch keinen Schüler der zweiten Klasse gefunden, der das im Unterricht gemacht hat.

- Es gibt einen magischen goldenen Kessel. Lege so wenige Frösche wie möglich hinein. Die Zahlen im goldenen Kessel explodieren nicht. Starte mit zwei eisernen Kesseln und einem goldenen Kessel. Zahlen, die bei der Division durch fünf den gleichen Rest haben, müssen in denselben Kessel gehen. Diese Erweiterung und die nächste sind für ältere Schüler gedacht. Sie stammen vom Julia Robinson Mathematics Festival.
- Wähle aus allen Eisenkesseln Quadrate, Würfel oder Zahlen aus der Fibonacci-Folge. Auch hier ist das Ziel, möglichst viele davon in eine bestimmte Anzahl von Kesseln zu bekommen.
- Wie hoch kannst du mit zwei eisernen Kesseln kommen, wenn ein Kessel nur dann explodiert, wenn drei Frösche im Kessel den Frosch ergeben, der hineingelegt wird?
- Was passiert, wenn ein Kessel nur dann explodiert, wenn genau ein Froschpaar die Summe des Frosches hat, der hineingelegt wird? Wenn zwei Froschpaare die Summe des hineingelegten Frosches ergeben, passiert nichts.

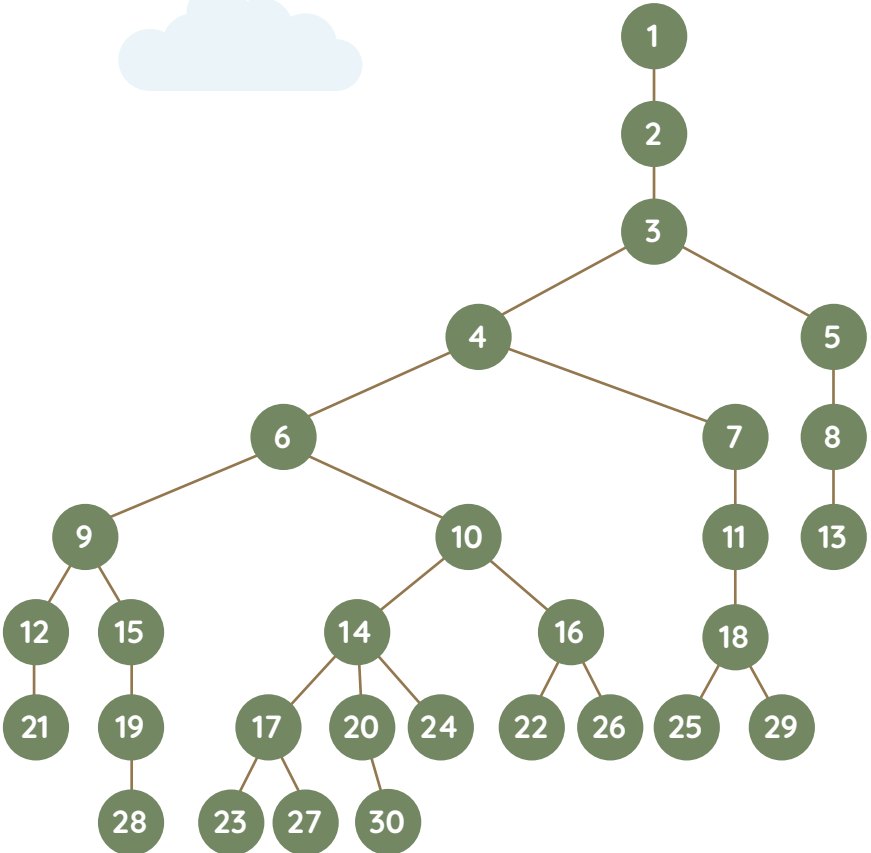
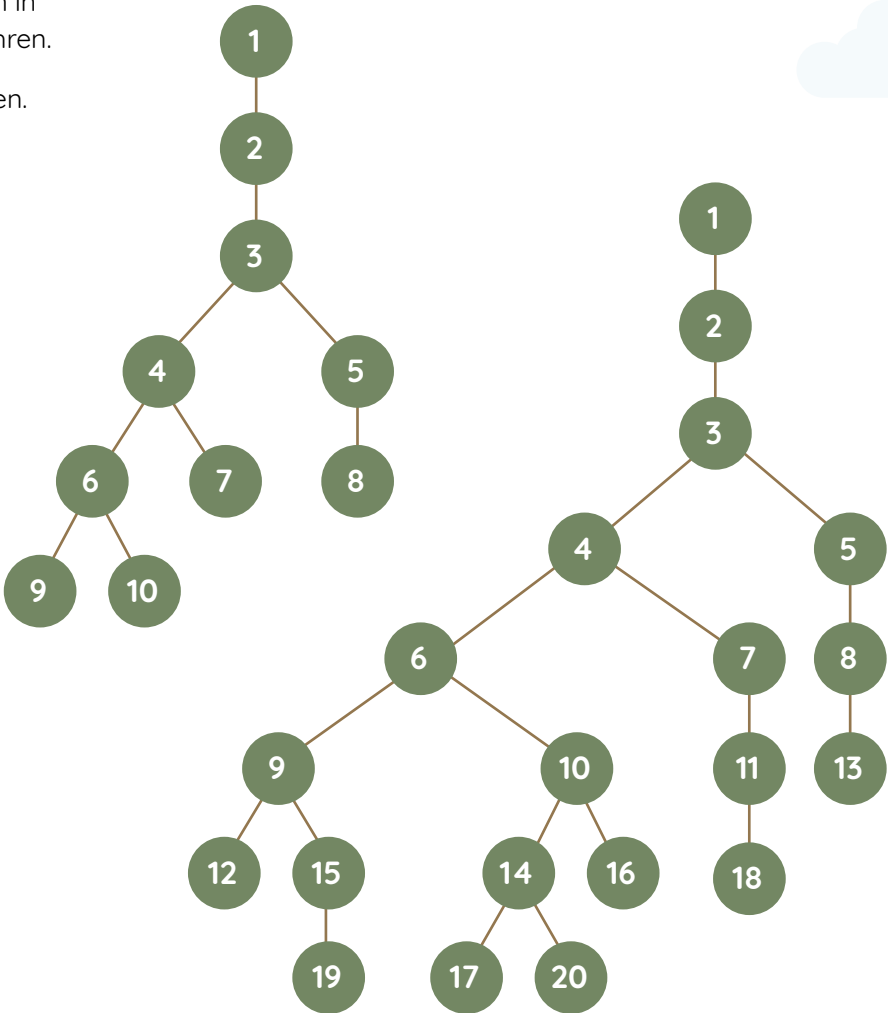


BANYAN BAUM

Ein einsamer Banyan Baum drückt Jahr für Jahr seine Wurzeln in den Boden. Hier sind Bilder nach zehn, zwanzig und dreißig Jahren.

Wie wachsen die Wurzeln? Es gibt einfache Regeln zu entdecken.
Was ist die nächste Zahl, die unter der Wurzel wächst:
30-20-14-10-6-4-3-2-1?

SPOILERALARM!



Im Klassenzimmer sollten diese Wurzeln eine ganze Zahl nach der anderen gezeigt werden, wobei die Kinder dazu aufgefordert werden:

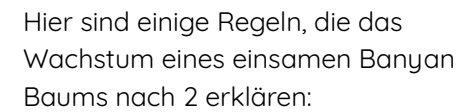
- vorhersagen, wo die nächste ganze Zahl erscheinen könnte.
- Beobachtungen machen.
- Hypothesen über die Regeln aufstellen.
- Hypothesen aufgeben, die nicht zu den Beobachtungen passen.

Das ist die wissenschaftliche Methode. Die wissenschaftliche Methode wird ironischerweise nicht im naturwissenschaftlichen Unterricht vermittelt, indem man die Kinder in die Natur schickt, damit sie sich die Hände schmutzig machen, sondern im Matheunterricht mit Mini-Mathematik-Universen wie diesen Banyan Bäumen. Warum? Die Regeln unseres realen Universums sind komplex und schwer zu entdecken, während die Regeln der Mini-Mathematik-Universen so gestaltet sind, dass sie entdeckt werden können.

In der Klasse sollte es genauso viele falsche Hypothesen wie richtige Hypothesen geben. Das ist der beste Indikator dafür, dass die Kinder offen genug sind, um über ihre Ideen zu sprechen. Falls du nicht genug falsche Hypothesen bekommst, frage gezielt nach. "Was ist eine Hypothese, von der wir wissen, dass sie falsch ist?"

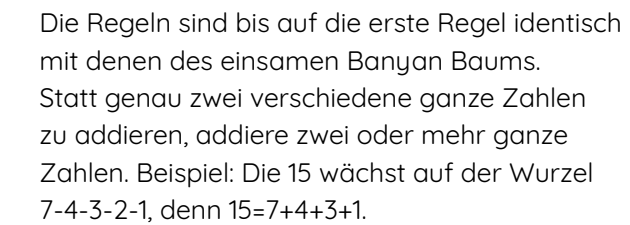


- Mit jeder Wurzel werden die ganzen Zahlen größer.
- Jede ganze Zahl von 1-60 kommt genau einmal vor.
- Einige Wurzeln sehen so aus, als würden sie nur gerade Zahlen enthalten.
- Der linke Teil (6-9-12-21-33-39) ist das vergessene Zählen von Dreien.
- Die Zahlen breiten sich horizontal aus, wenn die Wurzeln älter werden.
Die 9 und die 10 lagen früher dicht beieinander.
- Einige Wurzeln wie 13 und 24 sehen aus,
als hätten sie aufgehört zu wachsen



- Eine ganze Zahl wächst auf einer Wurzel, wenn sie die Summe von zwei verschiedenen Zahlen ist. Beispiel: Die 14 wächst auf der Wurzel **10-6-4-3-2-1**, weil $14=10+4$.
- Wenn es eine Wahl gibt, wächst sie auf der kleinstmöglichen Zahl. Beispiel: Die 14 wächst nicht auf der Wurzel **11-7-4-3-2-1**, denn sie zieht es vor, unter der kleineren Zahl 10 zu wachsen.
- Das Wachstum unter einer Zahl nimmt von links nach rechts zu. Beispiel: Unter 31 steht 35-45-48
- Zahlen liegen in der Mitte zwischen den Zahlen unter ihnen. Beispiel: Die 14 liegt weder weit links über der 17 noch weit rechts über der 24. Sie liegt in der Mitte.
- Die niedrigsten Zahlen auf den Wurzeln sind gleichmäßig von links nach rechts verteilt: 39-47-49-5351-60-56-57-55-58-44-52-59-48-50-2454-38-42-36-43-29-13.
- Wurzeln mit der gleichen Anzahl von Zahlen reichen in dieselbe Tiefe.

Findest du die Regeln für diesen nahen Cousin des einsamen Banyan Baums heraus?



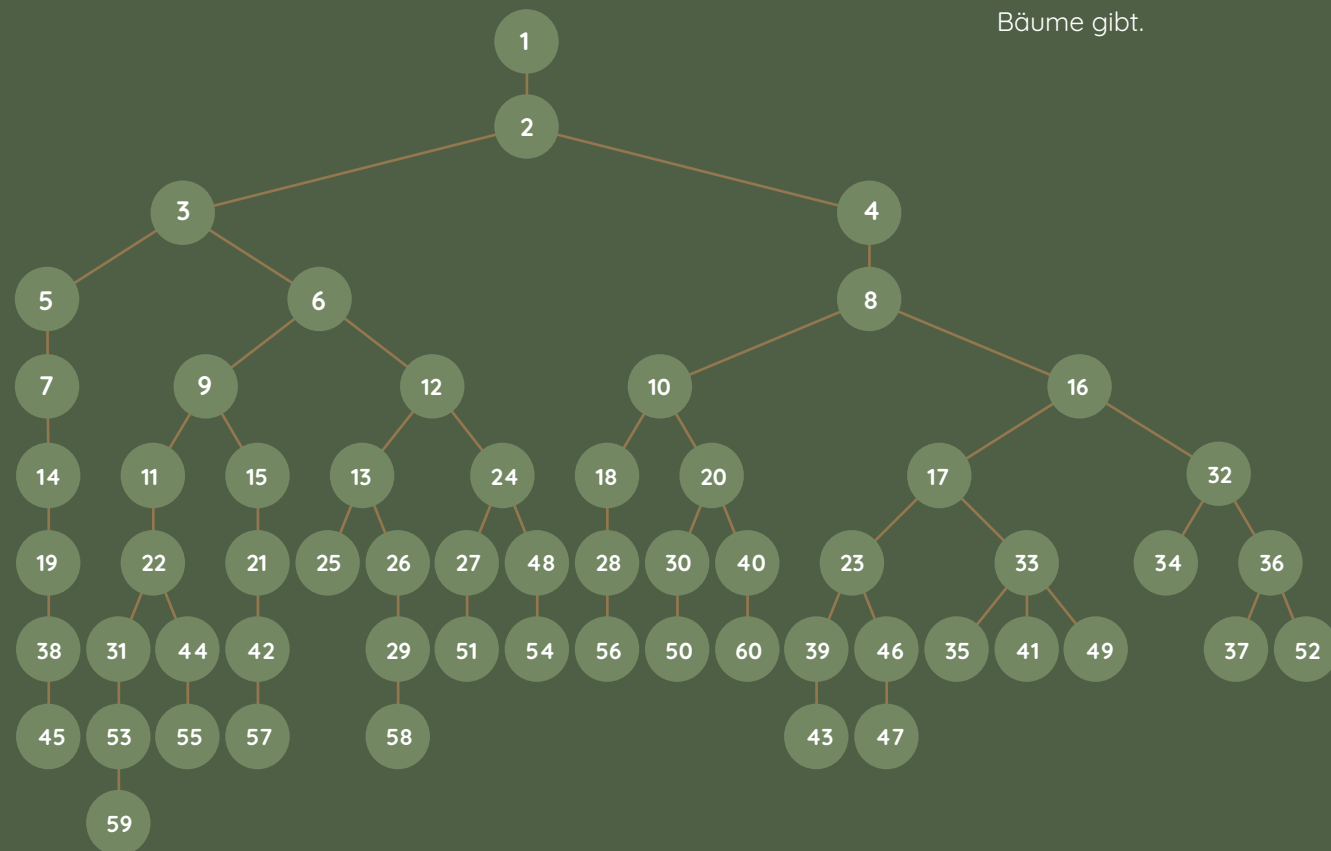
DIE UNENDLICHE GURKE

Hier sind die Wurzeln von zwei sechzig Jahre alten Bäumen im Unendlichen Wald. Alle Wurzeln im Unendlichen Wald wachsen nach denselben Regeln. Findest du heraus, welche das sind?

SPOILERALARM!

Hier sind die wichtigsten Regeln für den Unendlichen Wald:

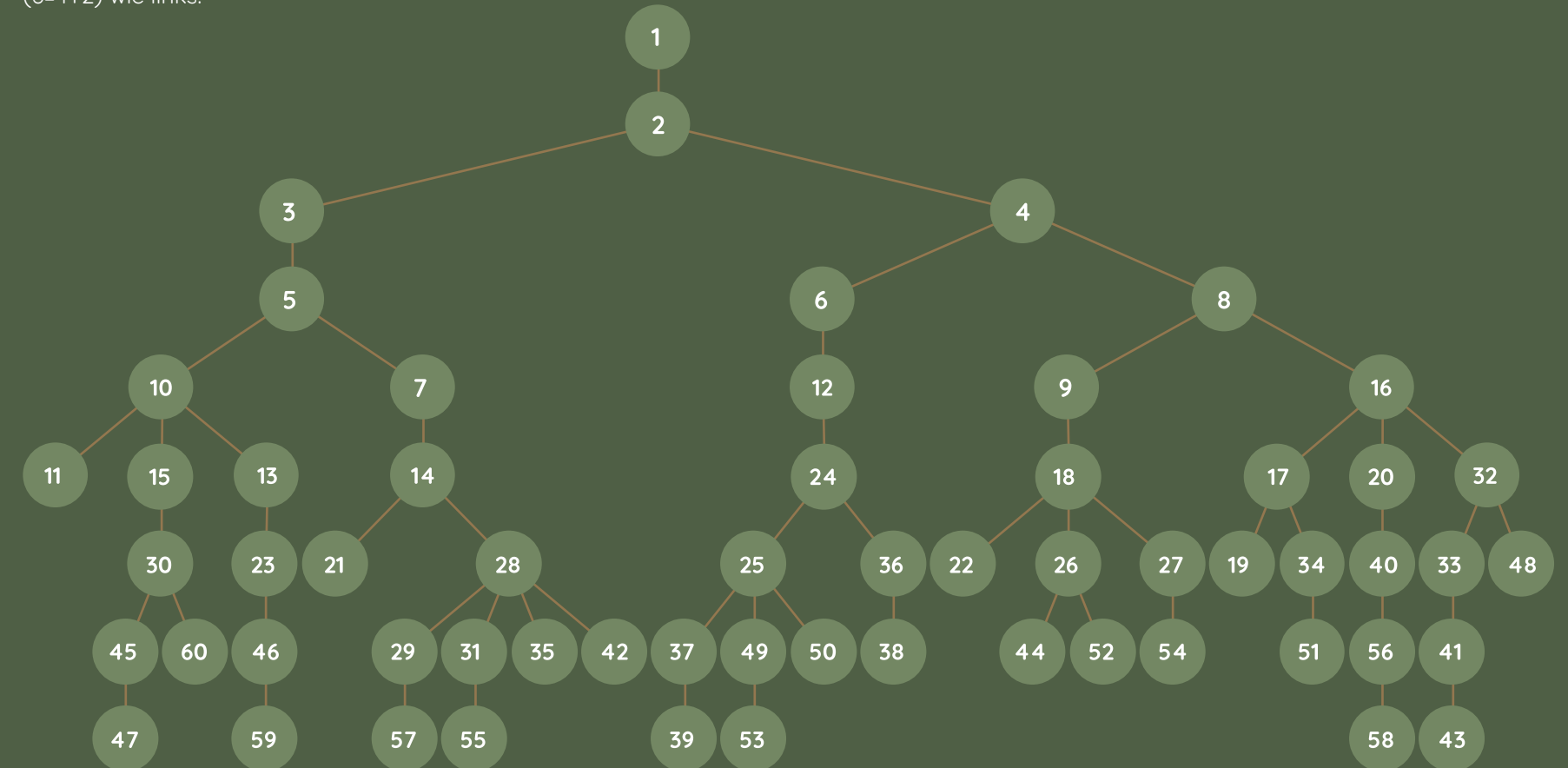
- Alle Wurzeln beginnen mit 1.
- Jedes Jahr wächst die nächste ganze Zahl auf einer Wurzel, die die Summe von zwei Zahlen ist, aber im Gegensatz zu unseren vorherigen Bäumen können diese ganzen Zahlen gleich sein. Beispiel: 32 wächst auf der Wurzel 16-8-4-2-1, denn $32=16+16$.
- Jedes Wachstum muss auf einer möglichst kurzen Wurzel stehen. Beispiel: Im unteren Baum wächst die 17 auf einer Wurzel der Länge 5: 16-8-4-2-1 ($17=16+1$) und nicht auf einer Wurzel der Länge 6: 15-10-5-3-2-1 ($17=15+2$). Häufig hat man die Wahl zwischen vielen gleich kurzen Wurzeln. Diese Wahl ist der Grund dafür, dass es im Unendlichen Wald unendlich viele Bäume gibt.



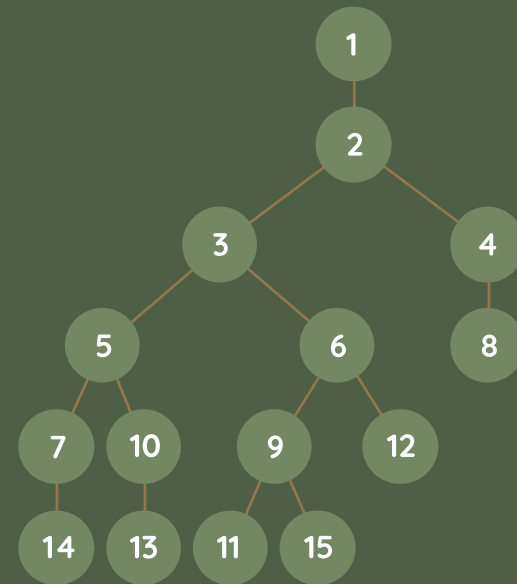
Die Bäume im Unendlichen Wald befürchten, dass ihre Wurzeln zu tief reichen. Für manche Zahlen gibt es keine Wahl. Die Zahl 6 befindet sich immer auf der gleichen Wurzeltiefe. Sie liegt entweder auf der 4-tiefen Wurzel 6-3-2-1 ($6=3+3$) wie oben oder auf der 4-tiefen Wurzel 6-4-2-1 ($6=4+2$) wie links.

Welche ist die kleinste Zahl, die auf zwei verschiedenen Wurzeltiefen liegen kann?

SPOILERALARM!

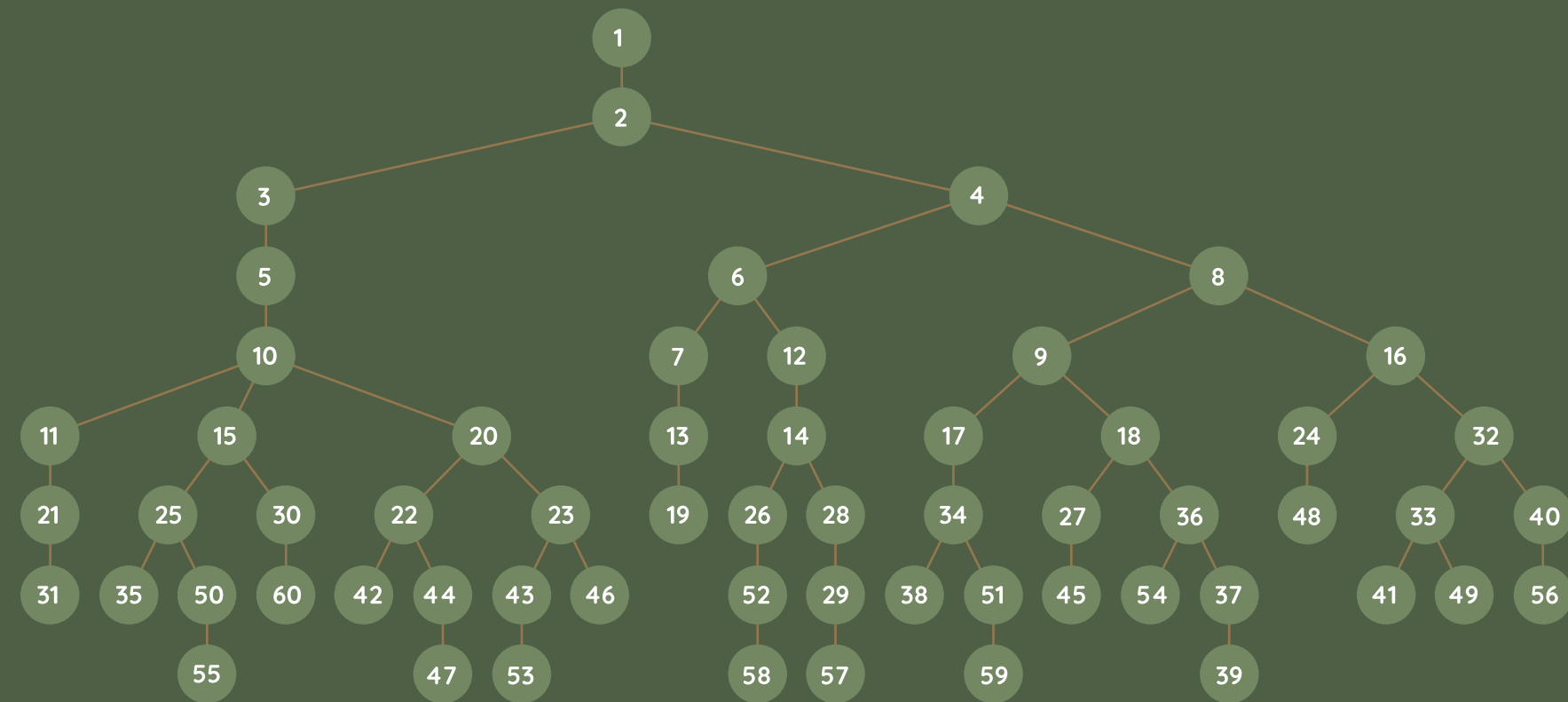


Die niedrigste Zahl, die in drei oder vier verschiedenen Tiefen vorkommen kann, kenne ich nicht.



Es gibt nur einen unendlich alten Baum, der nie einen Wettbewerb verliert. Er existiert, aber seine verzweigten Wurzeln bleiben ein Geheimnis.

Die Lösung für dieses Rätsel findest du auf der nächsten Seite.



Hallo,

ich bin Gordon Hamilton. Ich bin Vater von zwei Jugendlichen, aber beruflich vor allem als Erfinder von Brettspielen wie Santorini und als Leiter von MathPickle.com bekannt.



Vor 18 Jahren wurde mein Sohn gerade geboren und ich dachte mir, ich schaue mal, was die Schule für ihn bereithält. Ich meldete mich freiwillig als Alibi-Mathematikerin auf einer Mathe-Messe in einer Schule in Calgary, Kanada.

Ich lief zwischen den Ausstellungen umher, löste Rätsel und unterhielt mich mit den Schülern. Dann passierte es. Ein Mädchen aus der fünften Klasse erklärte ihr Rätsel. Es war bekannt, aber für mich war es neu. Ich versuchte, es auf diese Weise zu lösen. Ich versuchte, es auf diese Weise zu lösen. Sie wusste, dass ich die Mathematikerin war. Je mehr ich mich abmühte, desto breiter wurde ihr böses kleines Grinsen.

Ich löste das Rätsel erst, als ich am Abend nach Hause kam, aber als ich die Schule verließ, wurde mir klar, dass mein Scheitern das schönste Geschenk war, das ich dem Mädchen hätte machen können.

MathPickle und dieses Buch sind ein direktes Resultat dieser Begegnung.

Die 14 Unendlichen Gurken in diesem Buch sind so gestaltet, dass sie viele Schüler ansprechen. Sie sind alle originell. Ich bin wirklich stolz auf sie. 😊





Bisse von der Apfel

- Unterrichten ist eine experimentelle Wissenschaft.
- Die Arithmetik wird überbewertet. Schnelligkeit wird überbewertet. Langsames, schwieriges Problemlösen ist genau das, worauf wir den Großteil der Unterrichtszeit konzentrieren müssen.
- **Mathematik muss schwer sein!** Das Hauptziel des Mathematikunterrichts ist es, den Schülern das Denken beizubringen. Wenn dir jemand sagt, dass er Mathe "leicht" machen will, dann lauf weg - er versteht nicht, worum es geht.
- **Warum unterrichten wir Mathematik?** #Grund Nr. 1: Wir unterrichten Mathematik weil wir wissen, was bleibt, wenn die Mathematik vergessen wird.
- Versuche, konsequentes Denken vor dem Hintergrund von Religion, Politik, Literatur oder sogar Wissenschaft zu unterrichten. Das klappt nicht. **Wähle Mathe.**

- Wenn ich mich entscheiden muss zwischen einem Kind in der 6. Klasse, das schnell seinen Stundenplan auswendig lernen kann, und einem Kind, das scharfsinnig genug denken kann, um mich in einem Brettspiel zu schlagen, dann wähle ich das Kind, das denken kann. Ich hoffe, ich muss mich nicht entscheiden.
- **Schenke das Geschenk des Scheiterns.**
- Indem die Schüler täglich wiederholt mit Misserfolgen konfrontiert werden, verlieren sie das Stigma des Scheiterns und können sich voll und ganz darauf einlassen.
- Eltern verlangen oft, dass begabte Schüler den Lehrplan schneller durchlaufen. Diese Schüler hüpfen und springen von Erfolg zu Erfolg, bis sie die Universität erreichen - und dann platsch! Das Scheitern muss bereits im Kindergarten in die Erfahrungen aller Kinder - insbesondere der begabten - eingeplant werden.
- Sport und Mathe sind die einzigen beiden Fächer, in denen es eine klare Rückmeldung für die Lehrer gibt. Schüler werfen den Basketball entweder ein oder nicht. Die Antwort ist entweder richtig oder falsch. Diese klare Rückmeldung ist das perfekte Mittel, um den Schülern beizubringen, wie man sich bewegt und denkt.
- Manche Pädagogen legen zu viel Wert auf "reale" Probleme. Die "reale Welt" ist irrelevant. Entscheidend für die Beurteilung, ob ein Lehrplanproblem gut ist, ist nur eine Frage: **Wird das gesamte Spektrum der Fähigkeiten der Schüler berücksichtigt?**

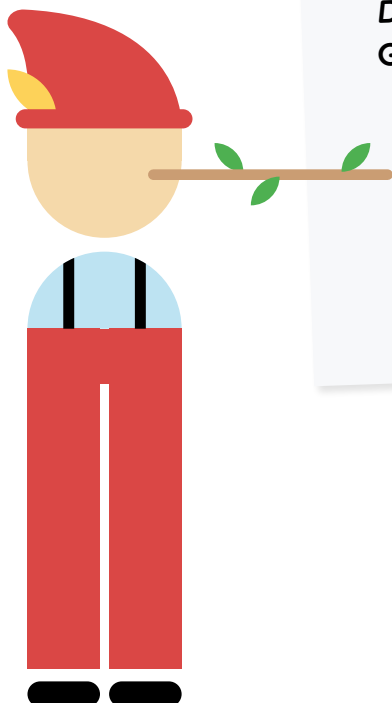
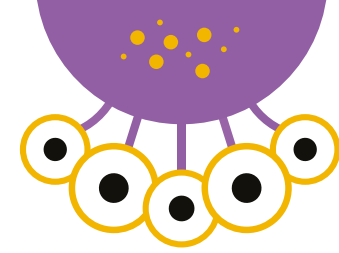
- **Nicht unterbrechen!** Die Mathestunde endet in 5 Minuten. 85% der Schüler sind beschäftigt. Ist es Zeit zum Nachdenken? Wahrscheinlich nicht.
- Genauso wenig wie wir eine Klasse haben, die "Vokabeln" heißt, sollten wir eine Klasse haben, die "Mathematik" heißt.
- Benenne den Mathematikunterricht in der Grundschule in "Problemlösungsunterricht" um. Diese Klassen würden die Mathematik nutzen, um interessante Rätsel zu lösen.
- Wenn ein Schüler seine Arbeit nicht zeigt, dann beschwere dich nicht und gib ihm eine schwierigere Aufgabe.
- Fordere jeden Tag eine unmögliche Aufgabe. Wenn deine Schüler nicht darauf vertrauen können, dass du ihnen nette, seriöse Aufgaben stellst, wird der Matheunterricht ganz bestimmt interessant.
- Verpacke Mathe nicht in nette, saubere Pakete. **Beende es mit einer Frage.** "Ich frage mich, ob wir ein Venn-Diagramm mit vier Kreisen erstellen können?"
- Dein wichtigstes Ziel bei der Unterrichtsgestaltung ist es nicht, den Unterricht **EINFACH** zu gestalten, sondern ihn **SPANNEND** zu machen.
- Die wissenschaftliche Methode sollte zuerst im Mathematikunterricht unterrichtet werden. Die Schüler sollen die Regeln eines mathematischen Miniuniversums erraten, das erschaffen wurde, um seine Geheimnisse zu enthüllen. Die Gesetze der realen Welt sind zu komplex.

- Regeln sind langweilig. Erkläre bei einem Grundschulrätsel nicht zuerst die Regeln. Das wird 20% der Schüler langweilen. **Beginne stattdessen mit einem emotionalen Erlebnis ...** Die Klasse soll versuchen, das Rätsel zu lösen, ohne die Regeln zu kennen. Natürlich scheitern sie. Lacht gemeinsam! Wie augenzwinkernd "fies" von dir! Sag ihnen eine Regel, nachdem sie gescheitert sind - oder lass sie die Regel erraten, an der sie gescheitert sind.
- Es lohnt sich, mit Schülern zu experimentieren, die gemeinsam Aufgaben lösen. Viele Kinder finden soziale Matheaufgaben spannend.
- **Schönheit geht vor Wahrheit.** Es gibt keine Entschuldigung für hässliche Mathematik in der Grundschule. Es sollte schön aussehen. Zu oft feiern wir Arbeitsblätter, die alle wahr und langweilig und hässlich sind.
- Die Rätsel in diesem Buch sind nicht für die Elite gedacht. Problemlösen ist das Herzstück einer guten Mathematikausbildung für alle.
- **#Aufgabe Nr. 1 der Eltern:** Ihr Kind jede Woche in einem Brettspiel zu besiegen. So können Eltern den Problemlösungsunterricht am besten ergänzen.

ULAM numbers

Die Seitenzahlen in diesem Buch sind Ulam-Nummern. Mehr dazu erfahren Sie auf Seite 6.

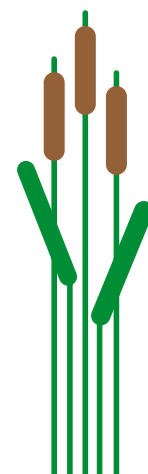
	1	53	145	243	382	502	673	847
	2	57	148	253	390	522	685	849
	3	62	155	258	400	524	688	861
	4	69	175	260	402	544	690	864
	6	72	177	273	409	546	695	866
	8	77	180	282	412	566	720	891
	11	82	182	309	414	568	722	893
	13	87	189	316	429	585	732	905
	16	97	197	319	431	602	734	927
	18	99	206	324	434	605	739	949
	26	102	209	339	441	607	751	983
	28	106	219	341	451	612	781	986
	36	114	221	356	456	624	783	991
	38	126	236	358	483	627	798	999
	47	131	238	363	485	646	800	...
	48	138	241	370	497	668	820	



**Eine Rätselsammlung, die unendlich
viel Spaß macht!**
David Martin Präsident des Math Council Alberta Teachers
Association

**Die Unendliche Gurke macht das, was Martin
Gardner gemacht hat, aber es öffnet die Tür
auch für viel jüngere Lernende.**
Scott Kim Rätselmeister

**Die Unendliche Gurke gehört in die
Hosentasche eines jeden Mathelehrers.**
Stephanie Englehaupt Grundschullehrerin



Dieses Buch wurde von Menschen
geschrieben und illustriert.